

FRIEDRICH WAISMANN

EINFÜHRUNG IN DAS
MATHEMATISCHE
DENKEN

DIE BEGRIFFSBILDUNG DER
MODERNEN MATHEMATIK

MIT EINEM VORWORT VON

PROFESSOR DR. KARL MENGER

1936

GEROLD & CO. / WIEN

COPYRIGHT 1936 BY GEROLD & CO., WIEN

DRUCK PAUL GERIN, WIEN

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<i>Vorwort von Karl Menger</i>	V—VIII
1. Die verschiedenen Zahlarten	3
2. Kritik an der Zahlenerweiterung	12
3. Arithmetik und Geometrie	16
4. Strenger Aufbau der Lehre von den ganzen Zahlen	21
5. Die rationalen Zahlen	40
6. Die Grundlagen des Rechnens mit natürlichen Zahlen	53
7. Strenger Aufbau der elementaren Arithmetik	63
8. Das Prinzip der vollständigen Induktion	71
9. Der gegenwärtige Stand der Grundlagenforschung	80
A. Der Formalismus.	80
B. Die logische Schule	85
C. Ausblick	92
10. Limes und Häufungspunkt	97
11. Das Rechnen mit Folgen. Der Differentialquotient	110
12. Merkwürdige Kurven	119
Anhang: Was ist Geometrie?	136
13. Die reellen Zahlen.	142
A. Cantors Theorie	144
B. Dedekinds Theorie	154
C. Vergleich der beiden Theorien	159
D. Die Einzigkeit des reellen Zahlensystems.	161
E. Verschiedene Bemerkungen	165
14. Ultrareelle Zahlen	169
15. Komplexe und hyperkomplexe Zahlen	175
16. Erfinden oder Entdecken?	181
<i>Nachwort</i>	188

Vorwort.

Auf zwei Arten wird versucht, fachwissenschaftliche Kenntnisse einem breiteren Leserkreis bekanntzumachen. Die einen Popularisatoren behandeln inmitten von Schilderungen der Probleme und der äußeren Umstände, die zu ihrer Stellung und Lösung geführt haben, die eigentlichen Schwierigkeiten des Gegenstandes möglichst kurz und lassen den Leser höchstens durch geistreiche Vergleiche das Wesen derselben ahnen. Die anderen verschmähen es, die wesentlichen Schwierigkeiten in irgendeiner Form zu umgehen, und bemühen sich, gerade sie dem Leser näherzubringen, wozu es nur einen Weg gibt: eine restlose Klarheit, wie sie sich vielfach nicht einmal in den für einen engen Leserkreis bestimmten Originalarbeiten findet.

Diesen zweiten Weg zu beschreiten und ans Ende zu gehen, stellt hohe Anforderungen an den Autor. Selbst die geistreichsten Vergleiche und die blendendsten Bemerkungen in gemeinverständlichen Darstellungen der ersten Art können dem Fachmann, dem sie in die Hand fallen, nur zu oft nicht über den Zweifel hinweghelfen, ob der Autor selbst den Gegenstand völlig erfaßt. Restlose Klarheit hingegen ist nur einem wissenschaftlichen Schriftsteller möglich, der den behandelten Stoff wirklich durchdrungen hat.

Freilich — gemeinverständliche Bücher der zweiten Art stellen auch etwas höhere Anforderungen an den Leser. Er muß manche ihm ungewohnte und daher vielleicht zunächst ein wenig mühsame Gedankenfolge unter der Anleitung des Autors durchdenken. Dafür kann er dann aber sicher sein, daß er nicht einem oberflächlichen Halbverständnis, sondern wirklicher Einsicht zugeführt wird.

Es scheint mir sehr begrüßenswert, daß hinsichtlich der modernsten Mathematik der Verfasser des vorliegenden Buches sein pädagogisches Geschick zur Abfassung einer gemeinverständlichen Darstellung verwendet, die den Leser in die wirkliche Denkweise einführt, die in wichtigen Teilen dieser Wissenschaft den Forscher lenkt. Wer dieses Buch liest, erfährt keine Anekdoten, die mit den Äußerlichkeiten mathematischer Gelehrten-

arbeit verknüpft sind, er erlangt auch nicht eine flüchtige Übersicht über tausend mehr oder weniger wichtige Probleme, die den Mathematiker beschäftigen, aber er gewinnt eine gründliche Einsicht in die Art, in welcher einige sehr fundamentale Fragen behandelt werden. Und wenn er das Buch gelesen und durchdacht hat, so hat er — vielleicht anfänglich mit einiger Mühe, aber infolge der Klarheit der Darstellung jedenfalls mit einem Mindestmaß von Mühe — einen Einblick in einige recht schwierige Fragen und Ergebnisse der Mathematik gewonnen, vor allem in solche, die für den Philosophen von Interesse sind.

*

Darüber hinaus werden im vorliegenden Buche auch Fragen der mathematischen Philosophie behandelt und damit Gebiete gestreift, auf denen die Meinungen der hervorragendsten Forscher seit jeher und bis auf den heutigen Tag stark auseinandergehen.

Sind die mathematischen Sätze empirischen Ursprungs, wie Mill und Mach meinten? Sollen wir Kant glauben, der die arithmetischen und die geometrischen Sätze als synthetische Urteile a priori erklärte? Hat Poincaré recht, wenn er sagte, daß zwar die arithmetischen Grundsätze synthetische Urteile a priori, die geometrischen Sätze hingegen analytisch wären, — oder Frege, der die arithmetischen Grundsätze für analytisch und die geometrischen Wahrheiten für synthetisch hielt? Oder können wir schließlich denjenigen folgen, welche mit Russell die sämtlichen mathematischen Sätze als analytisch bezeichnen? Werden die mathematischen Sätze durch die Erfahrung verbürgt? Beruhen sie letztlich auf Intuition und Evidenzerlebnissen? Sind sie dadurch begründet, daß die Mathematik ein Teil der Logik und diese, wie man heute öfters sagt, ein System von Tautologien ist? Oder besteht die Begründung der Mathematik im Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit?

Ich, für meinen Teil, glaube, daß keine einzige von all diesen Fragen zu bejahen ist, daß das, was der Mathematiker tut, nichts anderes ist, als die Herleitung von Aussagen mit Hilfe gewisser aufzuzählender (in verschiedener Weise wählbaren) Methoden aus gewissen aufzuzählenden (in verschiedener Weise wählbarer) Aussagen — und daß alles, was Mathematik und Logik über diese, einer „Begründung“ weder fähige noch bedürftige Tätigkeit des Mathematikers aussagen können, in dieser simplen Tatsachen-

feststellung besteht. Ähnlich ist die Grundeinstellung des vorliegenden Buches, das über einige Fragen der mathematischen Philosophie auch neue Gedanken vorträgt. Daß es kaum möglich sein dürfte, auf diesem Gebiete ungeteilte Zustimmung zu finden, ist angesichts der geschilderten Divergenz der Ansichten wohl klar. Aber auch in Punkten, in denen man dem Buche vielleicht nicht ganz zustimmt, dürfte man vieles anregend finden.*)

*

In der theoretischen Physik und in manchen Zweigen der technischen Wissenschaften, neuerdings auch in Teilen der Biologie und der Wirtschaftstheorie, wird Mathematik verwendet, d. h. Aussagen werden vielfach in so allgemeiner und konziser Form vorgetragen, daß es unumgänglich notwendig ist, die Praxis des mathematischen Herleitens von Aussagen aus Aussagen zu beherrschen, wenn man die Formulierung der einzelnen und die Verknüpfung der verschiedenen Aussagen durchblicken, insbesondere von den Ausgangssätzen zu den Folgerungen weiterschreiten will.

Aber auch in Wissenschaften, wo die Sachlage eine andere ist, wie z. B. in der Jurisprudenz, in der Soziologie, in den ohne Mathematik

*) Kenner der Philosophie der Mathematik werden beachten, wie in dem Abschnitt über die vollständige Induktion auseinandergesetzt wird, daß — um es ganz schlicht auszudrücken — ihre Hinzunahme zu den Ausgangssätzen oder Herleitungsregeln die Herleitung eines umfassenden Bereiches von Aussagen gestattet, die ohne ihre Hinzunahme nicht hergeleitet werden können, und zwar von Aussagen über „alle“ natürlichen Zahlen, da die vollständige Induktion als eine Festsetzung über den Gebrauch des Wortes „alle“ für die natürlichen Zahlen aufgefaßt wird. — Was die auf Cantor und Frege zurückgehende Definition der Gleichzähligkeit betrifft, so wird man wohl zugeben, daß sie nur eine von vielen möglichen Präzisierungen des vagen und mehrdeutigen Gebrauches darstellt, der von diesem Wort in der Umgangssprache gemacht wird — eine Einseitigkeit, die sie freilich wohl mit jeder definitorischen Präzisierung eines Wortes der Umgangssprache teilt; auch wird man vielleicht zustimmen, daß die von ihr für die Anwendung auf die Erfahrung angegebenen Kriterien, verglichen mit denen der üblichen Definitionen grundlegender physikalischer Begriffe, wie Längengleichheit, Gleichzeitigkeit u. a., nicht präziser sind — allerdings, wie mir scheint, auch nicht weniger präzise. Die große mathematische Bedeutung dieser Definition beruht denn auch vorwiegend auf ihrer Fruchtbarkeit, d. h. auf dem Umstand, daß so viele Folgerungen aus ihr hergeleitet werden konnten. Aber gerade weil diese Definition sich als so besonders fruchtbar erwiesen hat, daß neben ihr bisher überhaupt keine andere Definition aufzukommen vermochte, ist es gewiß von Nutzen (speziell auch, um der irrtümlichen Auffassung vorzubeugen, als sei sie die einzig denkbare Definition), daß auf sonstige diesbezügliche Möglichkeiten hingewiesen wird.

arbeitenden Teilen und Darstellungen der Wirtschaftstheorie, wo also eine Praxis in den verschiedenen speziellen Methoden mathematischen Herleitens entbehrlich ist, würde doch die Kenntnis der mathematischen Methode, wie ich glaube, oft von großem Nutzen sein, ja, in fast jeder Diskussion über irgendeinen Gegenstand gäbe es Gelegenheit, diesbezügliche Einsichten zu verwerten. Nicht etwa, daß bei größerer Verbreitung des Einblickes in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.

Welchen Teil der Mathematik man zum Zwecke dieser theoretischen Propädeutik studiert, ob es die Arithmetik oder die Algebra, ob es analytische Geometrie oder Axiomatik der Elementargeometrie, ob es Mengenlehre oder moderne Logik ist, — das ist ziemlich belanglos. Es kommt darauf an, daß es eine Schrift oder eine Vorlesung ist, die das allgemein Methodische nicht ganz vernachlässigt. Die Lehrbücher der Logik, völlig unberührt von der modernen Entwicklung dieser Wissenschaft, wie sie heute zur philosophischen Propädeutik verwendet werden, sind allerdings zu einer solchen Einführung in die mathematischen und logischen Methoden ungeeignet. Ja, die Spezialisierung des mathematischen Unterrichtes bringt es mit sich, daß selbst in vielen höheren mathematischen Lehrbüchern und Vorlesungen der prinzipielle Gesichtspunkt, aus dem auch der Nichtmathematiker so vielen Nutzen ziehen könnte, vernachlässigt wird.

Hingegen ist dieser methodische Gesichtspunkt gerade das, was z. B. in der vorliegenden Schrift in den Vordergrund gerückt wird. Und darum würde eine weite Verbreitung des Buches sicher in vieler Hinsicht Nutzen stiften.

Karl Menger.

Es ist das Ziel der folgenden Betrachtungen, einen Einblick in das Wesen der mathematischen Begriffsbildung zu geben, also von dem, was der Mathematiker treibt, etwa das herauszuheben, was einen philosophischen Betrachter daran interessieren könnte. Damit ist schon der Unterschied gegenüber den Lehrbüchern der Mathematik gegeben: der Leser findet hier nicht ein System von Lehrsätzen mit vollständig ausgeführten Beweisen, er findet nicht Rechnungen und Beispiele, auch nicht Anwendungen der Mathematik — alles das soll zurücktreten zugunsten einer Darstellung der mathematischen Ideen.

An erster Stelle soll hier nun ausführlicher vom Aufbau des Zahlenreiches gehandelt werden. Die Wahl dieses Themas bedarf einer kurzen Rechtfertigung. Von intuitiven Gesichtspunkten ausgehend, hatten Leibniz und Newton die Differential- und Integralrechnung geschaffen. Das 18. Jahrhundert bringt einen außerordentlichen Aufschwung dieser Forschungen, eine glänzende Entdeckung reiht sich an die andere, sowohl im Bezirk der reinen Analysis wie im Gebiet ihrer Anwendungen. Nicht mit Unrecht hat man diese Periode der Mathematik mit dem Zeitalter der großen Entdecker und Seehelden verglichen. Die Mathematiker jener Zeit hatten das Gefühl, in eine neue geistige Welt einzudringen, begierig, die Umrisse des Kontinents zu erforschen, der sich da vor ihnen aus dem Nebel erhob. Mit jener Reihe wunderbarer Entdeckungen kontrastiert seltsam das Dunkel, das über die Grundlagen dieser ganzen Gedankenschöpfung gebreitet lag. Man kann nicht behaupten, daß sich Leibniz und Newton über die Bedeutung eines Differentialquotienten sehr klar gewesen wären. Ihre Ausführungen schwanken, aber in der Hauptsache schwebte ihnen wohl etwas wie ein Rechnen mit unendlich kleinen Größen vor. Was das heißen soll, ist schwer zu sagen; und so haftet der „Infinitesimalrechnung“ seit ihrer Geburt eine gewisse Dunkelheit an. Klar denkende Geister, wie der Philosoph Berkeley, haben mit ihrer Kritik nicht zurückgehalten; in der Schrift „The Analyst“ (1737) findet der Leser eine recht eingehende Erörterung der neuen Wissenschaft, die ziemlich vernichtend ausfällt. Daß nicht nur Philosophen so gedacht haben, daß auch den Mathematikern selbst bei ihrem Tun nicht ganz wohl war, bezeugt ein Ausspruch von Lagrange, der dem Ausgang des 18. Jahrhunderts angehört; er meinte, der Zustand der Mathematik sei wahrhaft beklagenswert: sie wimmle von Widersprüchen und wenn sie trotzdem zu so großen Erfolgen geführt habe, so läge das nur daran, daß Gott in seiner Allgüte es so gefügt habe, daß sich die Fehler gegenseitig aufheben.

Kein Wunder, wenn dieser Kalkül als etwas Unbegreifliches, fast als etwas Mystisches erschien, eine Kunst mehr als eine Wissenschaft, eingegeben von der Inspiration, aber nicht zugänglich dem logischen Denken. Diese Auffassung ging dann sogar in die Lehrbücher über. So ist z. B. bei Lübsen, einem im vorigen Jahrhundert sehr bekannten Autor, zu lesen, daß die Differentialrechnung ein mystisches Operieren mit unendlich kleinen Größen ist; das Differential ist ein Hauch, ein Nichts; und dann folgt ein englisches Zitat: Das Differential ist der Geist einer abgeschiedenen Größe.

Im breiten Publikum lebt diese Auffassung bis auf den heutigen Tag fort und hat da manchen seltsamen Gedanken gezeitigt. Ein Beispiel dafür ist das bekannte Buch Vaihingers „Die Philosophie des Als-Ob“, in welchem die Meinung vertreten wird, unser theoretisches Denken würde vielfach von Fiktionen geführt, d. h. von bewußt falschen Annahmen, die sich aber durch den Erfolg bewähren. Eine Hauptstütze dieser Ansicht erblickte Vaihinger in der Differential- und Integralrechnung, deren Grundbegriffe, wie er meinte, durchaus fiktiver Natur sind. Es ist bezeichnend, daß die Zeugen, die Vaihinger für seine Ansicht aufruft, durchwegs Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts sind, also Männer, welche die modernen Ideen noch gar nicht kannten.

In Wirklichkeit hat schon die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts in dieses Dunkel einiges Licht gebracht; wir nennen hier nur Gauß, Cauchy und Bolzano; diese Forscher bahnen die neue kritische Periode der Mathematik an, in welcher viel mehr als früher auf klare Definition der Begriffe und logische Strenge der Beweise gedrungen wird. Ihr Werk wird fortgesetzt und in gewissem Sinn abgeschlossen von Weierstraß, Cantor und Dedekind. Bei den Forschungen dieser Gelehrten hat sich nun herausgestellt, daß die eigentliche Wurzel der Schwierigkeiten in einer klaren Fassung des Begriffes des Kontinuums lag; dieser Begriff hängt nun sehr eng mit dem Begriff der irrationalen Zahl zusammen; und so verstehen wir es, daß jene Forscher schließlich auf die Untersuchung des Zahlbegriffes geführt wurden. Seit den Vorlesungen von Weierstraß ist es üblich, eine strenge Darstellung der Differential- und Integralrechnung mit einer Erörterung des Zahlbegriffes zu beginnen.

Auch wir wollen diesen Weg einschlagen, um uns mit den wichtigsten Begriffen der heutigen Mathematik bekannt zu machen.

1. Die verschiedenen Zahlarten.

Die Zahlen, die sich uns am frühesten darbieten, sind die natürlichen Zahlen oder die Kardinalzahlen 1, 2, 3, 4,, die wir zum Zählen von Dingen benützen. Um den folgenden Betrachtungen etwas mehr Anschaulichkeit zu geben, wollen wir uns einer Methode bedienen, von der wir noch oft Gebrauch machen werden, nämlich der geometrischen Versinnlichung der Zahlen durch Punkte auf einer Geraden. Zu dem Zweck wählt man auf einer Geraden einen beliebigen Punkt, den Anfangspunkt, ferner eine beliebige Strecke, die Längeneinheit, und trägt nun diese Strecke wiederholt nach einer Richtung ab. Den so entstandenen Punkten ordnet man die Zahlen 0, 1, 2, 3, zu.



Figur 1.

Diese Punkte sind nun die „Bilder“ der Zahlen und es ist für viele Zwecke vorteilhaft, unsere Vorstellungen an diese Skala von Punkten anzuknüpfen. Statt von der Zahlenreihe werden wir fortan auch von einer Punktreihe sprechen.

Welche Eigenschaften kommen nun dem System der natürlichen Zahlen zu?

1. Es ist ein geordnetes System, d. h. von zwei verschiedenen Zahlen steht immer fest, welche der andern vorangeht; mit andern Worten: die Beziehungen $a > b$, $a = b$, $a < b$ (a größer als b , a gleich b , a kleiner als b) bilden eine vollständige Disjunktion.

2. Deshalb hat es Sinn, den Begriff „zwischen“ auf Zahlen anzuwenden und etwa zu sagen: die Zahl c liegt zwischen a und b . Damit ist gemeint $a > c > b$ oder $a < c < b$. Untersucht man nun die Zahlen auf die Beziehung „zwischen“ hin, so stößt man auf eine ganz charakteristische Eigenschaft: jede Zahl liegt zwischen zwei anderen, ihrem unmittelbaren Vorgänger und ihrem unmittelbaren Nachfolger. Zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen läßt sich keine weitere einfügen.

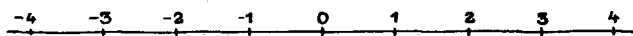
3. Nur eine einzige Zahl macht eine Ausnahme: die Zahl 0, die keinen Vorgänger besitzt. Dagegen gibt es keine Zahl, die nachfolgerlos wäre. Wir wollen diese Tatsache in der Form ausdrücken: die Zahlenreihe besitzt ein erstes, aber kein letztes Element; oder: sie ist einseitig unendlich.

Überlegt man nun, worauf die Möglichkeit der Abbildung der Zahlen auf Punkte einer Geraden beruht, so erkennt man unschwer, daß es die eben erwähnten Eigenschaften sind, die genau so der Punktreihe zukommen: auch sie ist geordnet, sobald man etwa die Punkte von links nach rechts durchläuft und denjenigen Punkt als früher ansieht, der weiter links liegt; und ebenso steht es mit den andern angeführten Eigenschaften: die Struktur des Zahlensystems läßt sich auf die des Punktsystems übertragen.

Auf zwei weitere Eigenschaften des Zahlensystems kommen wir, sobald wir die arithmetischen Operationen in den Kreis unserer Betrachtung ziehen. Welche von den vier Grundspezies der Arithmetik (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) lassen sich im Bereich der natürlichen Zahlen unumschränkt ausführen, sodaß das Ergebnis allemal wieder eine natürliche Zahl ist? Offenbar nur zwei: die Addition und die Multiplikation. Die Ausführung der Subtraktion $a - b$ ist dagegen an die Bedingung gebunden, daß der Minuend a größer ist als der Subtrahend b ; und die Division geht nur dann auf, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

Verknüpft man die Zahlen des Bereiches beliebig durch Addition und Multiplikation miteinander, so tritt man aus dem Bereich nie hinaus. Die natürlichen Zahlen erweisen sich in dieser Hinsicht als eine charakteristische Ganzheit, als ein abgeschlossenes System. Wir wollen diese Tatsache so ausdrücken, daß wir sagen: der Bereich der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen gegenüber der Addition und Multiplikation, nicht abgeschlossen gegenüber den beiden anderen Rechenoperationen. Gerade dieser letztere Umstand war nun der Anlaß, das System der natürlichen Zahlen nach zwei Richtungen zu erweitern: man hat erstens die negativen und dann zweitens die gebrochenen Zahlen eingeführt, um so die Unabgeschlossenheit des Zahlenbereiches zu beseitigen. Werfen wir nun einen näheren Blick auf diese Zahlschöpfungen!

Die negativen Zahlen kann man sich so entstanden denken, daß man den Aufbauprozeß der Zahlenreihe, nämlich die wiederholte Hinzufügung der Zahl 1, nach der entgegengesetzten Seite hin ausführt; so steigt man von der Zahl 3 zur Zahl 2 hinab, von 2 zu 1, von 1 zu 0 und schließlich von da zu Zahlen, die man der Reihe nach mit -1 , -2 , -3 usw. bezeichnet und in der unten angedeuteten Weise durch Punkte darstellt:



Figur 2.

Positive und negative Zahlen faßt man zusammen unter dem Namen „ganze Zahlen“.

Vergleichen wir nun die ganzen Zahlen mit den natürlichen Zahlen! Welche Eigenschaften sind bei dieser Erweiterung intakt geblieben? Sie sind noch immer ein geordnetes System; daher hat der Begriff „zwischen“ Sinn; aber es gibt jetzt keine Zahl mehr, die allen andern vorangeht; das System hat weder ein erstes noch ein letztes Element, es ist beiderseitig unendlich. Unbeschränkt ausführbar sind jetzt drei Operationen: neben der Addition und Multiplikation auch noch die Subtraktion. Dagegen ist der Quotient zweier ganzer Zahlen im allgemeinen keine ganze Zahl.

Um auch diese letztere Operation unbeschränkt ausführbar zu machen, hat man eine weitere Art von Zahlen eingeführt, die gebrochenen Zahlen. Ganze und gebrochene Zahlen zusammen nennt man „rationale Zahlen“. Das System der rationalen Zahlen ist abgeschlossen gegenüber allen vier Rechenoperationen. Man kommt also aus dem System nicht hinaus, wie immer man die einzelnen Individuen durch die vier Operationen verknüpft. Ein System von dieser Eigenschaft nennt man auch einen „Körper“ (das Wort ist hier in einem technischen Sinn gebraucht, etwa wie in dem Ausdruck „Körperschaft“, „corpus juris“). Das System der rationalen Zahlen ist geordnet; denn von zwei verschiedenen Brüchen steht eindeutig fest, welcher der kleinere und welcher der größere ist; dabei kann man sich auch die ganzen Zahlen formal als Brüche geschrieben denken. Versucht man dagegen die rationalen Zahlen nach dem früheren Muster als Punkte auf einer Geraden darzustellen, so tritt uns eine eigentümliche Schwierigkeit entgegen: die Brüche liegen offenbar zwischen den ganzen Zahlen, und dementsprechend müßten wir den Raum zwischen den äquidistanten Punkten der Fig. 2 durch weitere Punkte ausfüllen. Aber wie sind diese Punkte gelagert? Wenn wir etwa die Zahl $\frac{1}{2}$ herausgreifen — gibt es da auch noch etwas wie einen unmittelbaren Vorgänger oder einen unmittelbaren Nachfolger? Ganz und gar nicht! Denn wenn ich irgend einen Bruch nehme, der $\frac{1}{2}$ so nahe liegt wie man will, so ist es doch ein Leichtes, einen weiteren Bruch anzugeben, der $\frac{1}{2}$ noch näher liegt. (Der Leser beweise z. B., daß zwischen den beiden rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ immer die Zahl $\frac{a+c}{b+d}$ gelegen ist.)

Der Gesamtheit der rationalen Zahlen kommt daher eine Struktur zu, die von der der natürlichen und der ganzen Zahlen völlig verschieden ist: zwischen zwei rationalen Zahlen läßt sich immer wieder eine rationale Zahl einschalten. Zur Charakterisierung dieser eigentümlichen Struktur hat man den Begriff „d i c h t“ geprägt. Wir definieren: Ein geordnetes System von Dingen heißt dicht, wenn zwischen je zwei Dingen des Systems allemal wieder ein Ding des Systems liegt. In den rationalen Zahlen lernen wir ein

erstes Beispiel eines dichten Systems kennen. Die natürlichen und die ganzen Zahlen haben diese Eigenschaft nicht.

Die Tatsache der Dichtigkeit erschwert es nun außerordentlich, ein anschauliches Bild von der Verteilung der rationalen Zahlen zu gewinnen. Wir können zwar zwischen den Punkten, welche die ganzen Zahlen markieren sollen, weitere Punkte einschalten; aber wir müssen uns nun den Prozeß des Einfügens zwischen diesen Punkten unbegrenzt fortgesetzt denken, sodaß in jedes noch so schmale Intervall der Zahlenlinie unendlich viele rationale Punkte zu liegen kommen. Versucht man sich dieses System als fertiges Ganzes vorzustellen, so kommt man unvermeidlich zu Seltsamkeiten. Ein Beispiel dafür gibt schon die Gesamtheit der echten Brüche, mit Ausschluß von 0 und 1, ab. Die Klasse dieser Punkte hat offenbar Platz auf dem Intervall der Zahlenlinie zwischen 0 und 1, wir werden also versucht sein, sie uns als eine Punktmenge vorzustellen, welche diese Strecke wie ein unendlich feiner mikroskopischer Staub bedeckt. Diese Vorstellung drängt uns den Gedanken auf: Wenn ich die Gerade durchlaufe, sagen wir von links nach rechts und dabei von einem Punkt links von 0 beginne, dann muß ich doch irgendeinmal auf ein erstes Element der Punktmenge stoßen und, wenn ich das ganze Intervall durchwandert habe, schließlich auf ein letztes; die Menge muß einen Punkt besitzen, der am weitesten links und einen andern, der am weitesten rechts gelegen ist. Und doch lehrt eine einfache Besinnung, daß das ganz unmöglich ist: es gibt eben zufolge der Struktur der rationalen Zahlen keinen kleinsten echten Bruch (und ebensowenig einen größten). Begrifflich besteht hier nicht die mindeste Schwierigkeit; die Menge der echten Brüche ist klar und scharf definiert; aber der Versuch, diesen Begriff in ein anschauliches Bild umzusetzen, führt zu Paradoxien — ein Beleg dafür, wie wenig uns die Anschauung über solche Verhältnisse lehren kann, sodaß man verführt wird, wenn man sich ihr allein anvertraut.

Was wir bisher geschildert haben war die schrittweise Erweiterung des Zahlenbereiches, die mit den rationalen Zahlen zu einer Art Abschluß kommt. Und mancher wird geneigt sein, zu meinen, dieser Abschluß sei ein definitiver, da die rationalen Punkte die Zahlenlinie vollständig, lückenlos ausfüllen. Daß das ein Irrtum ist, daß die rationalen Zahlen, obwohl unendlich dicht gesät, noch nicht die ganze Zahlenlinien bedecken, ist die große Entdeckung des Pythagoras. Er zuerst hat erkannt, daß es Zahlen gibt, die, von den rationalen Zahlen vollständig verschieden, doch mit ihnen vergleichbar sind. Wir wollen uns diese außerordentliche Entdeckung verdeutlichen, indem wir uns über einer Strecke von der Länge 1 ein Quadrat konstruiert denken und in diesem Quadrat eine Diagonale ziehen. Die Anschauung sagt uns, daß diese Diagonale eine ganz bestimmte Länge haben muß. Versuchen wir sie zu berechnen! Nach dem Lehrsatz des Pythagoras

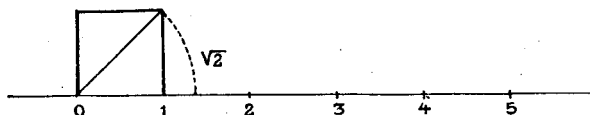
ist das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten, also 2; folglich kommt der Diagonale die Länge $\sqrt{2}$ zu; $\sqrt{2}$ ist diejenige Zahl, deren Quadrat 2 ist. Kann man sie in Bruchform darstellen? Zunächst ist klar, daß sie zwischen 1 und 2 liegt; versuchen wir es daher mit $1\frac{1}{2}$; das Quadrat hiervon ist $\frac{9}{4}$, also zu groß. Die gesuchte Zahl muß demnach größer sein als 1 und doch kleiner als $1\frac{1}{2}$; eine solche Zahl wäre $\frac{4}{3}$, die aber, wie die Probe zeigt, wieder zu klein ist. In dieser Weise könnten wir fortfahren, weitere Brüche zwischen die bisher untersuchten einzuschalten und nachzusehen, ob wir einen darunter finden, dessen Quadrat genau 2 gibt. Wenn wir das tun, werden wir zunächst Zahlen finden, die zu groß und andere, die zu klein sind und die wir in Form von zwei Reihen anordnen können:

zu klein:	zu groß:
1	2
$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$
$\frac{24}{17}$	$\frac{17}{12}$

Nun könnte jemand denken: wenn wir in dieser Beschäftigung immer weiter fortfahren und uns nur genug Zeit und Mühe nehmen, dann müssen wir doch schließlich einmal auf eine Zahl stoßen, deren Quadrat genau 2 ist. Um uns Klarheit hierüber zu verschaffen, wollen wir überlegen, woran es denn eigentlich gelegen hat, daß die bisherigen Versuche fehlgeschlagen haben, ob das sozusagen nur Zufall war oder ob ein tieferer Grund dahinter steckt. Wenn es eine rationale Zahl gäbe, die genau $\sqrt{2}$ ist, so hieße das, daß es einen Bruch $\frac{p}{q}$ gibt, sodaß $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ist. Nun kann ein Bruch nur dann eine ganze Zahl ergeben, wenn der Nenner im Zähler ohne Rest enthalten ist, wenn also p^2 durch q^2 teilbar ist; aber das ist nur dann möglich, wenn auch p durch q teilbar ist. Denn wenn p und q zwei teilerfremde Zahlen sind (d. h. zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Primfaktor besitzen), dann sind gewiß auch p^2 und q^2 teilerfremd; durch das Quadrieren können unmöglich Primfaktoren entstehen, die nicht schon vorhanden waren. Soll also $\frac{p^2}{q^2} = 2$ und mithin eine ganze Zahl sein, so muß auch $\frac{p}{q}$ ganz sein. Das aber ist unmöglich, da $\frac{p}{q}$ zwischen 1 und 2 liegen soll, zwischen welchen es keine ganze Zahl gibt.

So zeigt schon die einfachste Besinnung auf die Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen, daß es hoffnungslos ist, eine rationale Zahl finden zu wollen, deren Quadrat genau 2 ist. Andererseits kann niemand zweifeln,

daß die Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge 1 eine ganz bestimmte Länge hat. Denken wir uns diese Länge auf der Zahlenlinie von 0 aus aufgetragen, so erhalten wir einen Punkt, der der geometrische Repräsentant von $\sqrt{2}$ ist; dort wo $\sqrt{2}$ liegt, kann kein rationaler Punkt der Zahlenlinie gelegen sein. Das Ergebnis ist also: obwohl die rationalen Punkte die



Figur 3.

Zahlenlinie wie ein unendlich feiner Staub bedecken, füllen sie sie doch nicht vollständig aus. Sie bilden gleichsam ein poröses System, in dessen Ritzen und Spalten noch Platz bleibt für eine andere Art von Zahlen, die irrationalen.

Was sollen wir von der Verteilung der irrationalen Zahlen halten? Sind sie Ausnahmen, nur hie und da hineingeschneit zwischen die rationalen Zahlen? Die Antwort auf diese Frage können wir durch eine sehr einfache Überlegung finden. Denken wir uns nämlich die ganze Zahlenlinie mit den rationalen Punkten auf ihr im Verhältnis $1:\sqrt{2}$ ausgedehnt, also so, daß als Einheitsstrecke $\sqrt{2}$ verwendet wird, so wird jede rationale in eine Zahl übergeführt, von der sich ähnlich wie von $\sqrt{2}$ zeigen läßt, daß sie irrational ist, z. B. 1 in $\sqrt{2}$, $\frac{3}{10}$ in $\frac{3}{10}\sqrt{2}$ usw. Wir erhalten so ein zweites, ebenfalls dichtes System, das nun aus lauter irrationalen Zahlen besteht, die sich irgendwie zwischen die rationalen Zahlen hineinzwängen. Bedenkt man aber, daß sich irrationale Zahlen auf mancherlei Weise herstellen lassen, außer durch Quadratwurzeln auch durch Kubikwurzeln, 4. Wurzeln usw., daß man also auf eine einzige rationale Zahl unendlich viele Operationen „loslassen“ kann, die irrationale Ergebnisse liefern, so beginnt man zu ahnen, daß die irrationalen Zahlen, weit entfernt davon, die Ausnahme zu sein, vielmehr den Hauptteil an dem Aufbau der Zahlenlinie ausmachen. Tatsächlich wird in der Mengenlehre gezeigt, daß das Gros der Punkte auf der Zahlenlinie irrationalen Charakters ist und die rationalen Zahlen die verschwindenden Ausnahmen bilden.

Rationale und irrationale Zahlen wollen wir zusammenfassen unter der Bezeichnung „reelle Zahlen“.

Wir können diese Verhältnisse auch von einer andern Seite her überblicken, wenn wir von der Darstellung der Zahlen durch Dezimalbrüche ausgehen. Ein Dezimalbruch kann abbrechen oder ins Unendliche weitergehen. Wir wollen nun vorab bemerken, daß wir uns jede abbrechende

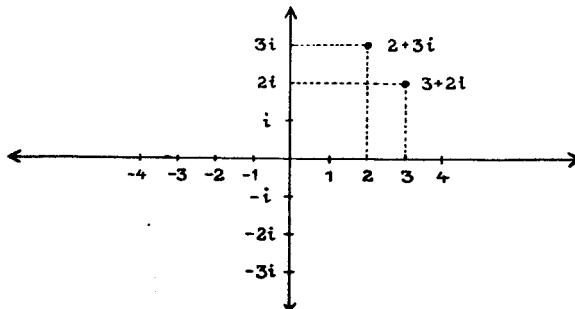
Dezimalzahl in eine nicht abbrechende umgeformt denken können, indem wir die letzte Ziffer um eine Einheit erniedrigen und hierauf lauter Neunen folgen lassen. So ist z. B. $\frac{1}{2} = 0\cdot5 = 0\cdot4999\dots$

Machen wir von dieser Möglichkeit Gebrauch, so können wir uns die Gesamtheit der reellen Zahlen durch endlose Dezimalbrüche dargestellt denken. Diese zerfallen dann in zwei Kategorien: in periodische und in aperiodische Dezimalbrüche, von denen die ersteren den rationalen Zahlen, die letzteren den irrationalen entsprechen. (Der einfache Beweis sei übergegangen.) Hier zeigt sich neuerdings, daß zwischen zwei rationalen Zahlen immer irrationale liegen müssen: denn zwischen zwei periodische Dezimalbrüche lassen sich beliebig viele aperiodische einfügen.

In eine neue Richtung der Erweiterung des Zahlbegriffes begeben wir uns mit den imaginären Zahlen. Der Antike waren sie noch unbekannt. Zum erstenmal sollen sie auftreten in einer Schrift des Cardano (1515), dessen Name mit der Auflösung der kubischen Gleichungen verknüpft ist. Doch fehlte es den Mathematikern jener Tage noch durchaus an der klaren Einsicht in die Natur dieser Größen. Es war vielmehr so, daß sich die imaginären Zahlen wider Willen und Absicht der Mathematiker von selbst in die Rechnungen eindrängten, und zwar aus algorithmischen Bedürfnissen: die Cardanische Formel stellt die Lösung einer kubischen Gleichung, obwohl sie reell ist, manchmal in einer Form dar, in der Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen sind; nun gibt es keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ wäre; diese Wurzeln sind also „unmöglich“. Man versuchte aber trotzdem, mit diesen neuartigen Ausdrücken weiterzurechnen wie mit gewöhnlichen Wurzeln; und der Erfolg gab diesem Bestreben recht. Wir stoßen hier auf ein Moment, das überhaupt in der Geschichte der Mathematik eine große Rolle spielt: es scheint, daß dem Arbeiten mit der Formel, dem Algorithmus, eine selbständige, vorwärtstreibende Kraft innewohnt und daß sie in unserem Fall die Mathematiker zum Hantieren mit den imaginären Zahlen brachte; zum großen Vorteil der Mathematik; denn die pedantische Forderung nach Strenge hätte wahrscheinlich die Weiterentwicklung gelähmt. Zum Glück setzten sich die Mathematiker jener Tage über subtile logische Bedenken hinweg; aber nicht so ganz, daß nicht in ihnen beim Operieren mit diesen merkwürdigen Gebilden ein gewisses Unbehagen zurückgeblieben wäre, ein schlechtes Gewissen, das sich in Namen wie „unmögliche“ oder „eingebildete Zahlen“ verrät. Ein Beleg dafür ist eine Äußerung von Leibniz aus dem Jahre 1702, welche lautet: „Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein.“ Man merkt hier den Reflex des sonderbaren Eindrucks, den diese Zahlen auf die Mathematiker gemacht haben müssen. Noch bei

Euler finden wir ein unverhohlenes Erstaunen über die merkwürdige Tatsache, daß eine Zahl wie $\sqrt{-1}$ weder kleiner noch größer als 5, weder positiv noch negativ ist, daß sie sich mit den gewöhnlichen Zahlen gar nicht vergleichen läßt. Und jeder Schüler, der zum erstenmal etwas von den imaginären Zahlen hört, empfindet dabei wieder den Eindruck des Geheimnisvollen, der sich später in dem Maße verflüchtigt, als man diese Zahlen anzuwenden lernt. Aber aufgeklärt wird die Natur dieser Zahlen dadurch nicht. Man hat sich einfach an sie gewöhnt und fragt nicht weiter. Unter diesen Umständen bedeutete es einen außerordentlichen Fortschritt, als Gauß eine geometrische Darstellung der imaginären Zahlen lehrte. Sie findet sich zum erstenmal in einer Selbstanzeige einer zahlentheoretischen Arbeit aus dem Jahre 1831 und hat einen außerordentlich tiefen Eindruck gemacht. Doch wissen wir aus dem Tagebuchnachlaß von Gauß, daß er sich schon 1797 im Besitz dieser Interpretation befunden hat. Durch diese Darstellung wollte Gauß die „wahre Metaphysik der imaginären Zahlen“ aufklären und ihnen volles Bürgerrecht in der Mathematik verleihen. Worin besteht nun diese Darstellung? Wir wissen bereits, daß die rationalen und irrationalen Zahlen die Zahlenlinie so erfüllen, daß nirgends auch nur die geringste Lücke bleibt. Will man nun auch die imaginären Zahlen geometrisch deuten, so muß man sich einer zweiten Geraden bedienen. Die Gaußsche Interpretation ist nun die, daß die reellen Zahlen als die Punkte der x-Achse, die imaginären als die Punkte der y-Achse eines rechtwinkligen, Cartesischen Koordinatensystems gedeutet werden, dessen Schnittpunkt die Zahl 0 darstellt, sodaß die positive reelle Zahlenachse durch eine Drehung um 90° in die positive imaginäre Zahlenachse übergeht; einen Grund für diese Darstellung hat Gauß nicht gegeben, wohl aber aus ihr die Berechtigung zum Rechnen mit den imaginären Zahlen abgeleitet.

An Hand dieser Deutung können wir uns aber auch gleich ein geometrisches Bild von denjenigen Zahlen machen, die sich durch Addition einer imaginären und einer reellen Zahl ergeben, wie $2 + 3i$, den sog. „komplexen Zahlen“.



Figur 4.

Eine solche Zahl kann als Punkt ($x = 2, y = 3$) des Koordinatenfeldes gedeutet werden. Wir sehen daraus, daß sich die Bilder der komplexen Zahlen über die Ebene verteilen. Zur Darstellung der komplexen Zahlen reicht die Linie nicht mehr aus. Man muß die Fläche heranziehen: die Zahlenwelt hat sich zu einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ausgeweitet. Der Leser mache sich deutlich, ein wie folgenreicher Schritt damit getan ist: hatte man bisher unter den Zahlen etwas verstanden, das sich nach „größer“ und „kleiner“ in eine Reihe bringen läßt, so hört das im Bereich der komplexen Zahlen auf; welche von den beiden Zahlen $2 + 3i$ und $3 + 2i$ soll z. B. als die größere gelten? Die (lineare) Ordnung hört auf und damit der Begriff des „zwischen“. Wir sehen hieraus, daß beim Übergang zu den komplexen Zahlen etwas zu gelten aufhört, was man bisher als ganz wesentlich für den Zahlbegriff angesehen hat, die Vergleichbarkeit der Zahlen ihrer Größe nach.

2. Kritik an der Zahlenerweiterung.

Damit haben wir einen ersten orientierenden Blick auf die Erweiterungen des Zahlenreiches geworfen, um uns so zunächst einmal mit dem Material bekannt zu machen, mit dem wir es weiter zu tun haben werden. Wir haben insbesondere erkannt, daß die Forderung, die Subtraktion, die Division und das Wurzelziehen zu einer in allen Fällen ausführbaren Operation zu machen der Anlaß war, neue Zahlen einzuführen.

So stellt man die Sache gewöhnlich dar, so lernt man es heute auf der Schule und so haben sich die Dinge im großen und ganzen auch historisch entwickelt. Und doch fällt es leicht, Fragen aufzuwerfen, die uns auf diesem Standpunkt in Verlegenheit setzen. Kann man etwa den Prozeß der Ausdehnung des Zahlenreiches noch weiter ausführen? Kann man Zahlen ersinnen, die sich nicht mehr in der Ebene darstellen lassen, sondern die eine Anordnung im dreidimensionalen Raum verlangen? Oder ist das unmöglich? Und wovon hängt das eigentlich ab? Mehr Gewicht als diesen Fragen müssen wir aber einer anderen beimessen. Wir haben es bisher so dargestellt, daß es die Nichtausführbarkeit gewisser Operationen war, welche zu einer Erweiterung des Zahlenreiches gedrängt hat. So war es die Nichtausführbarkeit der Subtraktion, welche zur Einführung der negativen, die Nichtausführbarkeit des Radizierens, die zur Einführung der irrationalen und dann später der imaginären Zahlen führte. Man sagte sich etwa: Die Aufgabe 7 von 5 abzuziehen ist unlösbar, aber nur solange man sich auf die bisher bekannten Zahlen beschränkt; das beweist nicht, daß sie im absoluten Sinn unlösbar ist, sondern nur, daß unser bisheriger Zahlenvorrat zu arm ist, um die Aufgabe lösen zu können. Wohlan, erweitern wir diesen Zahlenvorrat, fügen wir die negativen Zahlen hinzu und nun ist die Lösung möglich. Aber geht das immer? Könnte man jede unlösbare Aufgabe dadurch lösbar machen, daß man neue Zahlen einführt und nun die Lösung in Form einer neuen Zahl hinschreibt? Die Operation $\frac{1}{0}$ ist z. B. in der gewöhnlichen Arithmetik unausführbar; denn es gibt keine Zahl, die, mit 0 multipliziert, 1 liefert. Könnte man auch hier argumentieren: das heißt nur, daß die bisherigen Zahlen nicht hinreichen, um diese Aufgabe zu lösen. Wohlan, erweitern wir diesen Bereich durch die Forderung, daß auch diese Operation eine Lösung habe, setzen wir etwa $\frac{1}{0} = \omega$ und rechnen wir nun mit ω wie früher mit i ! Man versuche es einmal, auf dieser Grundlage eine neue Arith-

metik aufzubauen! Ginge das wohl? — Die Gleichung $1^x = 2$ hat weder im Bereiche der reellen noch der komplexen Zahlen eine Lösung; könnte man die Lösbarkeit nicht dadurch erzwingen, daß man erklärt: es soll eben eine Zahl geben, welche diese Gleichung befriedigt? — Betrachten wir zwei Gleichungen, wie etwa

$$x + y = 10, \quad 2x + 2y = 30.$$

Jedermann wird sagen, daß diese Gleichungen unlösbar sind; denn die zweite widerspricht der ersten. Sollen wir darauf erwidern: Ja, aber nur dann, wenn wir uns auf die bisher bekannten Zahlen beschränken; an und für sich hindert nichts, uns eine neue Art von Zahlen zu denken, mit welchen ein solches Gleichungssystem gelöst werden kann? Sieht man genau zu, worin die Einführung der neuen Zahlen bestanden hat, so war es doch nichts anderes, als daß man die Existenz von Zahlen postulierte, welche eine gestellte Aufgabe lösen sollen. Aber ist das eigentlich ein rechtmäßiges Vorgehen? Man verwechsle doch nicht den Wunsch mit der Erfüllung des Wunsches! Damit, daß ich mir wünsche, daß eine Zahl existieren soll, deren Quadrat 2 oder deren Quadrat -1 ist, ist noch gar nicht gesagt, daß es wirklich eine solche Zahl gibt. „Warum fordert man nicht auch, daß durch drei beliebige Punkte eine Gerade gezogen werde? Weil diese Forderung einen Widerspruch enthält. Ei, so beweise man denn erst, daß jene anderen Forderungen keinen Widerspruch enthalten! Ehe man das getan hat, ist alle vielerstrebte Strenge nichts als eitel Schein und Dunst.“ (Frege.) Und Russell bemerkt, „die Methode, das zu ‚postulieren‘, was man braucht, hat viele Vorteile. Es sind dieselben, wie die Vorteile des Diebstahls gegenüber der ehrlichen Arbeit“. Nein, dem Postulieren wohnt keine geheime Zauberkraft inne. Es ist ein allzu billiges Auskunftsmittel, als daß es richtig sein könnte.

So müssen wir uns denn gestehen, daß der ganze bisherige Aufbau der Zahlenwelt in der Luft schwebt; wir wissen gar nicht, ob die negativen, die gebrochenen, die irrationalen Zahlen „existieren“¹⁾; wir wissen gar nicht, mit welchem Recht wir den Zahlbereich erweitert haben. Wir müssen von neuem beginnen.

Vielleicht aber geht unsere Kritik zu weit. Ein Verteidiger der hergebrachten Auffassung könnte uns entgegenhalten: Die verschiedenen Anwendungen der Arithmetik zeigen doch sehr klar, daß es so etwas wie negative, gebrochene, irrationale Zahlen gibt. Daß etwa $\sqrt{2}$ existiert, d. h., daß die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ lösbar ist, geht doch zwingend aus der Überlegung des Pythagoras hervor, nach welcher die Diagonale des Einheitsquadrates die Länge $\sqrt{2}$ besitzt. Genau so steht es mit den gebrochenen

¹⁾ Über den Sinn des Existierens vgl. das letzte Kap.

Zahlen, deren Existenz ja auch rein geometrisch, durch die Teilung der Einheitsstrecke in eine Zahl gleich großer Teile eingesehen werden kann. Und was die negativen Zahlen betrifft, so zeigt uns ja, selbst wenn man von der Darstellung auf der Zahlenlinie absieht, die Anwendung auf Wärme- und Kältegrade, auf Vermögen und Schulden, auf Erhebung über den Meeresspiegel und Senkung unter denselben und dgl. m., daß das Rechnen mit negativen Zahlen einen klaren Sinn hat. Und so sind ja auch wirklich die Mathematiker zur Konzeption der neuen Ideen gelangt — warum sollen wir also diesen Weg verschmähen?

Zweierlei muß hier gesagt werden, um den Wert solcher Gedanken richtiger einzuschätzen.

Erstens ist es eine billige Forderung, daß zwischen der Arithmetik und ihrer Anwendung unterschieden werde. Gewiß wohnt Gedankengängen, wie den eben angeführten, eine hohe anregende Kraft inne, wie sie denn auch zweifellos die Mathematiker bei ihrer Konzeption geführt haben. Aber darum handelt es sich nicht, sondern um die Berechtigung des Operierens mit den neuen Zahlen, und da müssen wir sagen, daß uns die angeführten Beispiele nicht überzeugen. Will man im Ernst behaupten, daß die Existenz der negativen Zahlen durch die Tatsache, daß es Wärme und Kälte, Vermögen und Schulden auf der Welt gibt, garantiert ist? Sollen wir uns beim Aufbau der Arithmetik auf diese Dinge berufen? Wer sieht nicht, daß dadurch ein ganz fremdes Element in die Arithmetik hineinkommt, welches die Reinheit und Klarheit ihrer Begriffe gefährdet? Auch wenn es in der empirischen Welt den Unterschied von Wärme und Kälte, von Vermögen und Schulden gar nicht gäbe, so würde das das Recht zur Einführung von positiven und negativen Zahlen nicht berühren. Wenn wir die Existenz dieser Zahlen auf solche Tatsachen gründen wollten, so hieße das, die Arithmetik allzusehr mit den zufälligen Zügen der empirischen Welt verknüpfen. Und schließlich fühlen wir uns selbst von einer solchen Darstellung nicht befriedigt, denn sie reicht keineswegs zur Begründung des Rechnens mit ganzen Zahlen aus. Ein Zeichen dafür ist es, daß bei den Versuchen, die negativen Zahlen auf anschaulichem Wege einzuführen, die Vorzeichenregel Minus mal Minus = Plus den Stein des Anstoßes bildet: sie läßt sich in keiner Weise aus jenen Veranschaulichungen ablesen, sodaß uns solche Versuche mehr verwirren als aufklären. Und was sollen wir erst von gewissen höheren komplexen Zahlen, von gewissen transfiniten Zahlen, wie sie Georg Cantor eingeführt hat und anderen sagen, die keiner solchen Veranschaulichung-fähig sind? Existieren sie deshalb nicht? Oder muß man erst warten, bis man eine Anwendung dieser Zahlen auf Dinge oder Vorgänge der Wirklichkeit gefunden hat?

Demgegenüber ist die Forderung gewiß am Platz, die Arithmetik so aufzubauen, daß sie ihre Voraussetzungen in sich selbst findet und daß sie kein

einzigesmal auf etwas Außerarithmetisches — die Erfahrung, die Anschauung oder sonst etwas — Bezug nehmen muß. Mit klaren Worten hat schon H. Hankel jedes derartige Unternehmen abgewiesen: „Die Bedingung zur Aufstellung einer allgemeinen Arithmetik ist daher eine von allen Anschauungen losgelöste, rein intellektuelle Mathematik, eine reine Formenlehre, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder, die Zahlen verknüpft werden, sondern intellektuelle Objekte, Gedankendinge, denen aktuelle Objekte oder Relationen solcher entsprechen können, aber nicht müssen.“ („Theorie der komplexen Zahlensysteme“, S. 10.)

Das Zweite aber, das gesagt werden muß, ist dieses: Selbst wenn man sich bei der Einführung der irrationalen Zahlen auf die Geometrie berufen wollte, so könnte man auf diesem Wege doch nur die Existenz derjenigen Zahlen erkennen, die sich konstruieren lassen; wobei der Begriff „konstruierbar“ noch verschieden gefaßt werden kann: konstruierbar mit Lineal, mit Zirkel, mit Lineal und Zirkel oder mit Hilfe irgendwelcher anderen Mechanismen. Das heißt, der Begriff „konstruierbar“ ist immer relativ zu einem Kreis zugelassener Konstruktionsmittel zu verstehen. Wie immer man aber diese Mitteln abgrenzt, so zeigt es sich, daß die so konstruierbaren Punkte nur eine verschwindend kleine Minderheit bilden. Z. B. mit Zirkel und Lineal lassen sich alle Punkte auf der Zahlenlinie, welche Bilder sog. transzendenter Zahlen sind (das sind Zahlen, die keiner algebraischen Gleichung genügen, wie etwa π , $\log 2$, $2^{\sqrt{2}}$) nicht konstruieren, ja selbst die Mehrzahl der irrationalen Zahlen nicht, die einer algebraischen Gleichung genügen, der sog. algebraischen Zahlen: Alle diese Punkte würden uns also entgehen, wenn wir nur auf solche geometrische Konstruktionen berufen wollten.

Die Raumschauung zur Begründung der Arithmetik heranzuziehen, ist aber auch schon prinzipiell nicht angängig. Wir wollen versuchen, die Gründe zu schildern, welche dem Mathematiker diese Haltung diktieren und müssen zu dem Zweck ganz allgemein das Verhältnis von Arithmetik und Geometrie ins Auge fassen. Wir beginnen mit einer kurzen Schilderung von Aufbau und Entwicklung der Geometrie.

3. Arithmetik und Geometrie.

Das Werk, in welchem die Geometrie zum erstenmal nach streng wissenschaftlichen Prinzipien behandelt wird, sind die *στοιχεῖα* Euklids, das die längste Zeit als mustergültig anerkannt war. Der Aufbau dieses Werkes ist der: Es wird von einigen unmittelbar in der Anschauung gegebenen Sätzen ausgegangen, deren Richtigkeit nicht weiter diskutiert wird; auf diesen Sätzen wird das Gebäude der Geometrie so zu errichten gesucht, daß alle Sätze desselben streng logisch von jenen ersten Sätzen abgeleitet werden, ohne daß man dabei auch nur ein einzigesmal auf die Anschauung zurückgreifen müßte.¹⁾ Diese ersten Sätze, deren Richtigkeit der Anschauung entnommen wird, heißen Axiome. Unter den Axiomen Euklids lassen sich nun zwei Gruppen unterscheiden:

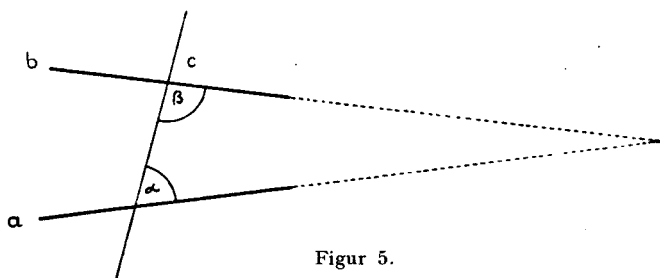
1. Allgemeine Größenaxiome (*Κοινὰ ἔννοια*), wie: „Zwei Größen, einer dritten gleich, sind untereinander gleich“, „Gleiches zu Gleichem hinzugefügt gibt Gleiches“, „Der Teil ist kleiner als das Ganze“.
2. Die eigentlichen geometrischen Axiome (*αἰρήματα*). Als solche führt Euklid fünf Sätze an:
 1. Jeder Punkt kann mit jedem Punkt durch eine Gerade verbunden werden.
 2. Jede Gerade läßt sich über jeden ihrer Endpunkte hinaus verlängern.
 3. Um jeden Punkt läßt sich mit jedem beliebigen Radius ein Kreis beschreiben.
 4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Und nun kommt ein sehr merkwürdiger Satz:

5. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Winkel auf der Innenseite der beiden Geraden zu einer Seite der dritten eine Summe ergeben, die kleiner ist als zwei Rechte, dann

¹⁾ Völlig erreicht wurde dieses Ziel von Euklid nicht; erst in der modernen Zeit ist dank den Arbeiten von Pasch, Veronese, Hilbert u. a. der Aufbau der Geometrie so streng gestaltet worden, daß man wirklich alle Beweise rein logisch, ohne Zuhilfenahme der Anschauung führen kann.

schneiden sich die beiden Geraden, genügend verlängert, auf der erwähnten Seite.



Figur 5.

Die historische Entwicklung hat vor allem an das Jetztgenannte, das „Parallelenaxiom“ angeknüpft. Angesichts eines so komplizierten Satzes erhob sich naturgemäß die Frage: Woher stammt seine Gewißheit? Denn er ist zu verwickelt, als daß er eine unmittelbare Tatsache der Anschauung aussprechen könnte. So alt die euklidische Geometrie ist, so alt sind die Zweifel an der Geltung dieses Axioms. Die Mathematiker der Folgezeit bemühten sich daher, das Parallelenaxiom aus den andern Axiomen herzuleiten und so die Geometrie von diesem „Makel“ zu reinigen; allein ohne Erfolg. Dies führte sie zu dem Versuch, einen indirekten Beweis für das Parallelenaxiom anzutreten, indem sie annahmen, das betreffende Axiom sei falsch und daraus die Folgerungen herleiteten, in der geheimen Hoffnung, endlich auf einen Widerspruch zu stoßen, der die Unzulässigkeit der Annahme, mithin die Richtigkeit des Gegenteiles dartun sollte. Dabei stießen sie in der Tat auf seltsame Resultate; z. B. daß ähnliche Figuren unmöglich wären, wenn das Parallelenaxiom nicht zuträfe (Wallis); oder daß es dann in der Ebene ein Dreieck von maximaler Größe geben müßte. Lambert fand: Wenn das Parallelenaxiom nicht gälte, dann gäbe es eine von Natur ausgezeichnete Längeneinheit — es wären also nicht mehr alle Strecken gleichberechtigt. So merkwürdig, ja absurd diese Resultate klingen — einen logischen Widerspruch bedeuten sie nicht. Johann Bolyai und Lobatschewsky haben dann der Frage eine ganz neue Wendung gegeben, indem sie konsequent die Folgerungen aus dem Fallenlassen des 5. Axioms entwickelten in der Überzeugung, diese würden niemals zu einem Widerspruch führen. Hier tue sich vielmehr eine ganz neue „antieuklidische“ Geometrie auf, die ebenso in sich konsequent und denkmöglich ist wie die euklidische.

Aber nun taucht ein neues Problem auf: die Konsequenzen aus diesen Annahmen haben zwar, so weit man sie verfolgt hat, zu keinem Widerspruch geführt. Aber woher wissen wir, daß sie auch künftig zu keinem Wider-

spruch führen werden? Das ist die entscheidende Frage; wie, wenn die Schlußketten eines Tages doch einen Widerspruch ergäben? Dann würde das ganze bis dahin aufgeführte Gebäude der nichteuklidischen Geometrie zusammenstürzen. So blieb zunächst, gleich einer drohenden Wolke ein Zweifel über der Gedankenschöpfung von Bolyai und Lobatschewsky schweben. Damit trat zum erstenmal das Problem der Widerspruchsfreiheit in den Gesichtskreis des Mathematikers.

Der Weg, den die Mathematiker in der Folgezeit beschritten hatten, ist von großem prinzipiellem Interesse. Ein direkter Nachweis der Widerspruchsfreiheit kommt offenbar nicht in Betracht. Denn ein solcher würde ja genau genommen verlangen, daß die ganze unübersehbare Kette der Schlußfolgerungen vorliege und wie ein fertiges Ganzes überblickt werden könne. Statt dessen beschritten sie einen indirekten Weg: F. Klein fand nämlich 1870, daß sich das ganze Gedankensystem der nichteuklidischen Geometrie auf das Gedankensystem der euklidischen Geometrie „abbilden“ läßt, sodaß jeder Widerspruch des einen Systems einen Widerspruch des andern Systems nach sich zöge. Präziser gesprochen: Jedem Begriff der nichteuklidischen Geometrie wird nach einer bestimmten Vorschrift ein Begriff der euklidischen Geometrie als sein Abbild zugeordnet, ebenso jedem Satz der einen Theorie ein Satz der andern und zwar so, daß entsprechende Sätze dieselbe logische Form haben. Ersetzt man nun in der nichteuklidischen Geometrie die Grundbegriffe durch die entsprechenden Begriffe der euklidischen, so gehen sämtliche Axiome der nichteuklidischen Geometrie in Sätze der euklidischen über. Man hat innerhalb der euklidischen Geometrie ein „Modell“ für die nichteuklidische hergestellt. Bei der geschilderten Ersetzung bleiben alle logischen Beziehungen zwischen den Sätzen erhalten: Ist in der einen Theorie T der Satz p eine logische Folge der Sätze q und r , so gilt das Nämliche für die ihnen in der Theorie T' entsprechenden Sätze p' , q' , r' . Alle Schlüsse innerhalb der einen Theorie übertragen sich ungeändert auf die andere. Würden nun die Axiome der Theorie T je auf einen Widerspruch führen (d. h. ließen sich zwei Schlußketten angeben, die, von den Axiomen ausgehend, einmal zu einem gewissen Satz p , das anderemal zur Verneinung eben dieses Satzes führen), so müßte dasselbe gelten von den analogen Aussagen der Theorie T' .

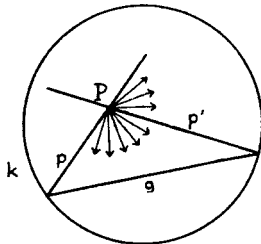
Wie das im Einzelnen gemeint ist, kann hier nicht ausgeführt werden; doch wollen wir wenigstens die ersten Schritte dieses Verfahrens andeuten: Zu dem Zweck denken wir uns in der euklidischen Ebene einen festen Kreis k . Wir stellen nun ein Lexikon auf, das den Grundbegriffen der nichteuklidischen Geometrie gewisse Begriffe der euklidischen zuordnet:

Unter einem „Punkt“ verstehen wir einen Punkt im Innern von k .

Unter einer „Geraden“ verstehen wir das Stück einer Geraden, das innerhalb von k verläuft.

Für die Winkel- und die Streckenmessung werden besondere Vorschriften gegeben, deren Erörterung uns hier zu weit führen würde. Nur soviel sei gesagt, daß diese Bestimmungen so gewählt sind, daß man eine beliebige Strecke auf einer Geraden unendlich oft hintereinander abtragen kann, ohne daß man das Kreisinnere verläßt. Diese Strecke wird, nach euklidischem Maßstab gemessen, natürlich immer kleiner. Anschaulich gesprochen: Ein Wesen, das sich von dem Mittelpunkt des Kreises gegen die Peripherie bewegt, schrumpft immer mehr zusammen, macht immer kürzere Schritte, so daß es den Kreisrand nie erreichen kann: dieser erscheint ihm ins Unendliche entrückt. (Doch wollen wir streng betonen, daß diese anschauliche Einkleidung mit der Beweiskraft der ganzen Überlegung nichts zu tun hat; die Einkleidung kann man fallen lassen und die Überlegung rein abstrakt führen, so daß jede etwaige Polemik gegen diese Einkleidung ihr Ziel verfehlt.)

Es zeigt sich dann, daß für die so definierten Gebilde sämtliche Axiome der euklidischen Geometrie zutreffen mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Denn betrachtet man die von einem festen Punkt P ausgehenden Geraden, so sieht man, daß sie bezüglich ihrer Lage zu einer festen Geraden g (die nicht durch P geht) in zwei Klassen zerfallen: in solche, welche die Gerade g



Figur 6.

schneiden und in solche, die g nicht schneiden. Diese zwei Klassen werden getrennt durch die zwei Geraden p und p' , die wir „Parallele“ nennen wollen, weil sie die Gerade g , nichteuklidisch gedacht, erst im Unendlich-Fernen schneiden. Man sieht, daß sich dann durch einen Punkt außerhalb einer Geraden g stets zwei Gerade ziehen lassen, die zu g parallel sind: das 5. euklidische Axiom hat seine Geltung verloren.

Man kann also sämtliche Sätze der nichteuklidischen Geometrie so deuten, daß sie von Figuren innerhalb eines festen Kreises k sprechen; und dabei kann gewiß kein Widerspruch auftreten, vorausgesetzt, daß die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist. Damit ist nun freilich kein absoluter Widerspruchsfreiheitsbeweis erbracht. Dennoch ist der Fortschritt ziemlich groß: die Frage der Widerspruchsfreiheit ist aus einem unbekanntem und schwerer überschaubarem Gebiet auf ein bekanntes, leichter zugängliches verlegt.

Die Mathematiker blieben aber dabei nicht stehen, sondern warfen alsbald die Frage auf, was denn die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie gewährleiste. (Denn gerade das Aufkommen der nichteuklidischen Geometrie und gewisse andere Entdeckungen, von denen wir noch sprechen werden, hatten das naive Vertrauen in die Anschauung erschüttert.) Hier bot sich den Mathematikern ein Weg dar, der uns heute nur als das Zu-Ende-

Denken der Idee der analytischen Geometrie erscheint. Mit den Namen Descartes und Fermat ist ja die Schöpfung der Koordinatengeometrie verknüpft, durch welche alle geometrischen (räumlichen) Beziehungen in eine Welt rein abstrakter Zahlbeziehungen übertragen werden. Man ordnet in bekannter Weise jedem Punkt der Ebene zwei reelle Zahlen zu, seine Abszisse x und seine Ordinate y . Jede Gerade ist dann gegeben als die Gesamtheit aller Punkte x, y , für welche eine lineare Gleichung $a x + b y = c$ besteht. In analoger Weise wird jedem Punkt des Raumes ein reelles Zahlentripel zugeordnet. Neben den axiomatischen Aufbau Euklids tritt so seit dem 17. Jahrhundert ein analytischer Neuaufbau, in dem die Punkte, Geraden, Ebenen durch reelle Zahlentripel, lineare Gleichungen und Gleichungssysteme dargestellt und die Beziehungen zwischen ihnen durch Beziehungen zwischen diesen arithmetischen Gebilden nachgezeichnet werden. Diese Arithmetisierung wurde im Einzelnen von Study durchgeführt, der Punkte der Ebene geradezu als Paare reeller Zahlen, Gerade als lineare Gleichungen definiert usw. und analytische Geometrie als rein rechnerische Behandlung derartiger arithmetischer Modelle auffaßt, ohne dabei auf die Anschauung zu rekurreren.

Diesen schon vorhandenen Apparat hat nun Hilbert benutzt, um die Frage der Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie auf die analoge Frage für das Gebiet der Analysis (der Lehre von den reellen Zahlen) zurückzuführen: er bemerkte, daß die ganze euklidische Geometrie in der Analysis realisiert ist, d. h. daß man aus den reellen Zahlen ein System von Dingen aufbauen kann, für welches bei passender Namengebung sämtliche Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt sind.

Daraus können wir folgenden wichtigen Schluß ziehen: Würde in der euklidischen Geometrie ein verborgener Widerspruch stecken, so müßte dieser auch schon in der Lehre von den reellen Zahlen anzutreffen sein. Im System der reellen Zahlen haben wir danach das logische Fundament für die anderen mathematischen Gedankensysteme, insbesondere für die verschiedenen Geometrien zu erblicken.

Bei dieser Sachlage erscheint es nun unerträglich, — und damit kommen wir auf die Bemerkungen am Schluß des vorigen Abschnittes zurück — daß man sich beim Aufbau der reellen Zahlen doch wieder auf die Raumsanschauung berufen soll — auf eben die Anschauung, die als verdächtig aus dem strengen Aufbau der Geometrie ausgeschlossen worden war. Wenn die Lehre von den reellen Zahlen der Geometrie als Stütze dient — wie kann man da die Existenz der irrationalen Zahlen der Geometrie entnehmen? Was trägt eigentlich den Bau und was wird getragen? Sich bei der Begründung der Arithmetik auf die Geometrie zu berufen, würde einen Zirkel bedeuten, und darum muß der Mathematiker diesen Weg ablehnen.

4. Strenger Aufbau der Lehre von den ganzen Zahlen.

Wir stehen also vor dem Problem: Wie soll man die verschiedenen Zahlenarten einführen, ohne zu geometrischen Erwägungen Zuflucht zu nehmen? Wie kann man die Arithmetik rein arithmetisch begründen?

Den Weg, den die Mathematiker in dieser Situation beschritten haben, wollen wir uns zunächst an einem Beispiel deutlich machen, an dem Begriff der Potenz. Unter einer Potenz versteht man ein Produkt, gebildet aus lauter gleichen Faktoren.

Es ist z. B.:

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ a \cdot a \cdot a &= a^3 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

und für diese Potenzen beweist man leicht die Sätze

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^m : a^n &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{mn}. \end{aligned}$$

Was sollen wir nun unter einem Ausdruck wie a^0 verstehen? Die bisherige Definition versagt, denn es heißt nichts, die Zahl a nullmal als Faktor zu setzen. In Lehrbüchern finden sich manchmal „Beweise“ dafür, daß $a^0 = 1$ ist. Ein solcher Beweis sieht etwa so aus:

Da $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ist, so muß das auch gelten, wenn man $n = 0$ setzt; dann ergibt sich $a^m \cdot a^0 = a^{m+0}$, d. h. $a^m \cdot a^0 = a^m$; folglich ist $a^0 = 1$. Dagegen ist zu sagen, daß die allgemeine Gleichung, auf die sich der Beweis beruft, ja nur für den Fall bewiesen worden ist, in welchem m und n ganze, von 0 verschiedene Zahlen sind; wir haben daher kein Recht, die Geltung dieser Gleichung auf den Fall $n = 0$ auszudehnen. Es ist zunächst gar nicht definiert, was a^0 ist, denn die Definition der Potenz a^n bezieht sich nur auf Zahlen n , die größer als 0 sind. Wir können aber die Definition willkürlich für den Fall $n = 0$ ergänzen und zwar setzen wir nun per definitionem $a^0 = 1$. Von einem Beweis dieser Gleichung kann dann aber natürlich keine Rede sein; jeder Versuch, einen solchen Beweis zu erbringen, verfällt in einen Zirkel.

Gegen unsere Behauptung, daß hier eine Festsetzung vorliege, sträubt sich nun der Verstand und sagt: Aber das ist doch gewiß nicht willkürlich; es muß vielmehr einen Grund haben, daß wir a^0 gerade $= 1$ setzen und nicht gleich einer andern Zahl. Wir wollen daher einen Augenblick überlegen,

was geschähe, wenn wir eine andere Festsetzung treffen würden. Nehmen wir an, ich wollte $a^0 = 5$ setzen. Ginge das wohl? Gewiß; denn diese Gleichung bedeutet ja nur die Vorschrift, das Zeichen „ a^0 “ überall durch das Zeichen „5“ zu ersetzen; und warum sollte ich das nicht tun dürfen? Wenn ich den Entschluß fasse, statt a^0 künftig 5 zu schreiben, so kann mich niemand widerlegen; oder besser gesagt: es ist hier nichts zu widerlegen, und insofern liegt hier wirklich eine neue Konvention vor. Aber eine ganz andere Frage ist es, ob diese Konvention zweckmäßig wäre. Das Gesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ würde für $n = 0$ seine Geltung verlieren. Für diesen Fall müßte ein neues Gesetz aufgestellt werden, das mit dem früheren nicht den geringsten Zusammenhang hätte. Nun trachtet aber der Mathematiker seine Begriffe so zu bilden, daß die Gesetze so weit wie möglich in Geltung bleiben. Diese Absicht würde vereitelt, wenn ich $a^0 = 5$ setzen wollte. Das einfache und klare System von Gesetzmäßigkeiten würde dadurch zerstört. Setze ich dagegen $a^0 = 1$, so bleiben die Potenzgesetze, die ursprünglich doch nur für $m, n > 0$ bewiesen worden sind, auch für den neuen Fall in Kraft; diese Konvention hat also vor den andern möglichen eine bedeutende Überlegenheit. Und nun erkennen wir, was der innere Grund für diese Festsetzung war: Unter all den unendlich vielen Konventionen, die ich treffen kann, ist eine dadurch ausgezeichnet, daß bei ihrer Wahl die Rechengesetze ungeändert bleiben. Die Aufrechterhaltung der Rechengesetze reguliert also die Begriffsbildung. Wir lernen hier ein erstes Beispiel für das kennen, was H. Hankel das „Prinzip der Permanenz der Rechenregeln“ genannt hat und das man so formulieren kann: Wenn man einen Begriff in der Mathematik über seine ursprüngliche Definition hinaus erweitern will, so ist unter all den möglichen Richtungen dieser Erweiterung diejenige zu wählen, bei welcher die Rechengesetze so weit wie möglich aufrecht erhalten bleiben. Dieses Permanenzprinzip ist nicht eine Behauptung, über deren Richtigkeit diskutiert werden könnte, sondern, wie gesagt, ein Leitprinzip der Begriffsbildung.

Dieses Prinzips wollen wir uns jetzt bedienen, um in strenger Weise das System der ganzen Zahlen einzuführen. So wie wir eben den Begriff der Potenz erweitert haben, wollen wir jetzt den Begriff der Differenz ausdehnen. Zu dem Zweck stellen wir uns die Regeln für das Rechnen mit Differenzen im Bereich der natürlichen Zahlen zusammen.

Zunächst ist klar, daß sich die Summe, die Differenz und das Produkt zweier Differenzen wieder in Form einer Differenz darstellen läßt. Es ist nämlich

- | | |
|-----|---|
| (1) | $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ |
| (2) | $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$ |
| (3) | $(a - b) \cdot (c - d) = (a c + b d) - (a d + b c)$ |

Diese drei Formeln lassen sich innerhalb der Arithmetik der natürlichen Zahlen beweisen, wie wir später erkennen werden. Ihnen stellen wir drei weitere Relationen an die Seite, welche die Ordnungsfähigkeit der Differenzen aussprechen:

- (4) es ist $a - b = a' - b'$, wenn $a + b' = a' + b$ ist
 (5) es ist $a - b > a' - b'$, wenn $a + b' > a' + b$ ist
 (6) es ist $a - b < a' - b'$, wenn $a + b' < a' + b$ ist.

Auch diese Sätze sind innerhalb der Arithmetik der natürlichen Zahlen beweisbar. Ihr Zweck ist der, uns Kriterien für die Größenbeziehungen zweier Differenzen zu liefern, in denen nicht wieder Differenzen auftreten.

Man sieht hieraus, daß man mit Differenzen natürlicher Zahlen einen Kalkül aufbauen kann; aber dieser Kalkül ist an die Voraussetzung gebunden, daß die Differenzen natürliche Zahlen sind, was per definitionem (vgl. S. 69) nur dann der Fall ist, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Nur unter dieser Bedingung sind unsere sechs Formeln beweisbar.

Wir werden jetzt diese Beschränkung abstreifen und einen allgemeinen Kalkül mit Differenzen aufbauen, wobei uns das Permanenzprinzip leiten soll. Demgemäß werden wir diese sechs Formeln als Festsetzungen ansehen, die erst den Begriff der „Differenz“ im weiteren Sinne des Wortes definieren; es wird sich zeigen, daß die Differenzen in diesem neuen Sinn genau das sind, was man gewöhnlich positive und negative Zahlen nennt.

Damit ist eine ganz entscheidende Wendung vollzogen: wir postulieren nicht mehr, daß die Subtraktion immer ausführbar sei, wir verzichten auf die Hypothese, daß es negative Zahlen gebe, wir bauen vielmehr ein System von Gedankendingen auf, das wir kraft willkürlicher Festsetzungen mit solchen Eigenschaften ausstatten, daß sie genau das leisten, was wir von den positiven und negativen Zahlen wünschen. Wir werden dann diese Gedankendinge als ganze Zahlen bezeichnen.

Die Gedankendinge, von denen wir sprechen, sind die Differenzen zweier natürlicher Zahlen. Um aber selbst den Anschein zu vermeiden, als ob dabei die unbeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion schon vorausgesetzt wäre, wollen wir den ganzen Kalkül so anlegen, daß dabei überhaupt nicht von Differenzen die Rede ist.

Statt von Differenzen handeln wir von Zahlenpaaren (a, b) ; daß wir zwei beliebige natürliche Zahlen a und b zu einem Paar zusammenstellen können, wird jeder zugeben; darin liegt keinerlei Postulat; und mehr brauchen wir nicht, um den folgenden Kalkül aufzubauen.

Als einzige Grundlage, auf welcher wir diesen Bau errichten, soll uns das System der natürlichen Zahlen dienen und die Rechengesetze, die in diesem Bereich gelten.

Objekt unserer Betrachtung sind Paare natürlicher Zahlen; dabei soll das Paar (a, b) von dem Paar (b, a) unterschieden werden. Wir wissen vorläufig gar nicht, was ein solches Zahlenpaar „bedeutet“ und verbinden mit ihm keinen anschaulichen Sinn, sondern wir bauen erst die Bedeutung auf, indem wir Regeln für die Verwendung dieser Symbole geben.

(1) Definition der Gleichheit.

Wir erklären zunächst, wann zwei Zahlenpaare „gleich“ heißen sollen. Unsere Festsetzung lautet:

$$(a, b) = (a', b'), \text{ wenn } a + b' = a' + b.$$

Kraft dieser Definition können wir prüfen, ob zwei Zahlenpaare gleich sind oder nicht, indem wir nachsehen, ob die rechtsstehenden Zahlenausdrücke gleich sind oder nicht: die Gleichheit zwischen Zahlenpaaren ist damit zurückgeführt auf die Gleichheit zwischen natürlichen Zahlen. Und das gilt ganz allgemein: wir werden jede Aussage über Zahlenpaare so umformen, daß sie nur von Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen spricht. Die ganze Arithmetik der Zahlenpaare stellt sich somit nur als eine neue Sprechweise dar, die in die Sprache der gewöhnlichen Arithmetik übersetzt werden kann. Wenn etwa jemand fragt: „Sind denn diese Zahlenpaare auch wirklich gleich?“ so müßten wir erwidern: das „wirklich“ ist hier unberechtigt. Wir wissen ja noch gar nicht, was hier „gleich“ heißt, sondern wir geben diesem Ausdruck erst einen Sinn, indem wir ein Kriterium für die Gleichheit aufstellen; und wie wir es wählen, steht in unserem Belieben.

Allein hier fragt es sich: Sind wir in der Wahl des Kriteriums wirklich frei? Hätte jede andere Festsetzung, die uns eingefallen wäre, denselben Dienst getan? Darauf ist folgendes zu erwidern: Dem Begriff „gleich“ kommt in der Arithmetik der natürlichen Zahlen schon ein ganz bestimmter Sinn zu. Wenn wir nun jetzt eine Bestimmung über die Gleichheit zweier Zahlenpaare treffen, so wird unser Vorgehen nur dann berechtigt¹⁾ sein, wenn die Gleichheit im System der Zahlenpaare eine ganz analoge Rolle spielt wie die Gleichheit im System der natürlichen Zahlen; oder deutlicher gesagt: wenn der Gleichheitsbegriff im neuen Denkbereich dieselben formalen Züge aufweist wie der Gleichheitsbegriff im alten. Welches sind nun diese Züge?

Die Gleichheit ist eine Beziehung zwischen natürlichen Zahlen, die

1. reflexiv ist, d. h. es ist $a = a$,
2. symmetrisch: aus $a = b$ folgt $b = a$,
3. transitiv: aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.

¹⁾ Vgl. dazu die Bemerkung S. 51.

Wenn wir nun im Bereich der Zahlenpaare oder sonst auf irgend einem Gebiet der Mathematik eine Definition der Gleichheit aufstellen, so sind wir verpflichtet zu beweisen¹⁾, daß sie diese drei formalen Eigenschaften hat; denn wäre dem nicht so, so hätten wir zwar eine gewisse Beziehung definiert; aber warum sollte diese Beziehung gerade Gleichheit genannt werden? Sie hätte mit dem, was wir sonst gleich nennen, nicht das geringste zu tun, und es wäre irreführend, denselben Ausdruck zu gebrauchen. Die Freiheit in der Definition findet also in diesen drei Forderungen eine Schranke. Sind nun diese Forderungen erfüllt?

ad 1. Daß jedes Zahlenpaar sich selbst gleich ist, ist leicht zu sehen: denn $(a, b) = (a, b)$ bedeutet ja laut Definition $a + b = a + b$, und das ist richtig, was immer man für a und b setzen mag.

ad 2. Zu zeigen ist: aus der Gleichung $(a, b) = (a', b')$ folgt die Gleichung $(a', b') = (a, b)$.

Die erste Gleichung bedeutet: $a + b' = a' + b$;

die zweite Gleichung bedeutet: $a' + b = a + b'$.

Die zweite Gleichung folgt aus der ersten durch Vertauschung der Seiten.

ad 3. Aus $(a, b) = (a', b')$

und $(a', b') = (a'', b'')$

folgt $(a, b) = (a'', b'')$.

Zwecks Beweises ersetzen wir die Gleichungen zwischen den Zahlenpaaren durch Gleichungen zwischen Zahlen. Es ist dann zu zeigen, daß aus

$$a + b' = a' + b$$

$$\text{und } a' + b'' = a'' + b' \quad \text{folgt } a + b'' = a'' + b.$$

Addiert man die ersten beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$a + b' + a' + b'' = a' + b + a'' + b'$$

und nach Weghebung der Glieder a' und b'

$$a + b'' = a'' + b,$$

das ist aber gerade die zu beweisende Gleichung.

Damit ist erkannt, daß der Gleichheitsbegriff tatsächlich die verlangten Eigenschaften hat und daß unsere Definition rechtmäßig war.

Mancher Leser wird denken, daß diese ganze Ableitung recht überflüssig war; denn liegt es nicht schon im Sinn der Gleichheit, daß jedes Ding sich selbst gleich ist? Ja, im Sinn der Gleichheit liegt das allerdings; aber wer sagt uns, daß die Beziehung, die wir in Definition (1) eingeführt haben, wirklich die Eigenschaften der Gleichheit hat? Das bedarf erst eines Beweises. Wenn ich z. B. definiert hätte:

$$(a, b) = (a', b'), \text{ wenn } a + b' = 2a' + b,$$

¹⁾ Vgl. indes die Bemerkung S. 51.

so wäre auch das eine Definition für das Zeichen „ $=$ “. Aber nun wäre im allgemeinen kein Zahlenpaar sich selbst gleich — ein Beleg dafür, wie wenig das Erfülltsein dieser Forderung sich von selbst versteht.

Bevor wir weiter gehen, ziehen wir aus der Definition der Gleichheit einen wichtigen Schluß: Es ist

$$(a, b) = (a + c, b + c),$$

wie man sofort aus Definition (1) erkennt; d. h. ein Zahlenpaar bleibt ungeändert, wenn man Vorderglied und Hinterglied um dieselbe Zahl vermehrt. Liest man die Gleichung von rechts nach links, so sagt sie uns, daß ein Zahlenpaar auch ungeändert bleibt, wenn man von beiden Gliedern dieselbe Zahl wegnimmt. Daraus ergibt sich, daß ein Zahlenpaar in unendlich vielen Formen dargestellt werden kann. So ist z. B.

$$(5, 3) = (6, 4) = (3, 1) = (2, 0) = (9, 7) = \dots$$

Unter all diesen Formen ist eine von besonderem Interesse, nämlich $(2, 0)$. Es gibt nun offenbar drei Möglichkeiten für ein Zahlenpaar:

1. Das Vorderglied ist größer als das Hinterglied; dann ist

$$(a, b) = (a - b, 0).$$

2. Das Vorderglied ist kleiner als das Hinterglied; dann ist

$$(a, b) = (0, b - a).$$

3. Vorder- und Hinterglied sind gleich; dann ist

$$(a, a) = (0, 0).$$

Im ersten Fall nennen wir das Zahlenpaar „positiv“, im zweiten Fall „negativ“, im dritten Fall ein „Nullpaar“. Jedes Zahlenpaar gehört einer und nur einer dieser drei Kategorien an.

2. Definition von „größer“.

Wir sagen, ein Zahlenpaar sei größer als ein anderes, in Zeichen $(a, b) > (a', b')$, wenn $a + b' > a' + b$.

Wieder haben wir zu prüfen, ob diese Definition berechtigt ist, d. h. ob der so gebildete Begriff „größer“ die formalen Eigenschaften hat, welche m in der gewöhnlichen Arithmetik zukommen. Dort ist dieser Begriff

1. irreflexiv, d. h. a ist niemals größer als a ,
2. asymmetrisch, d. h. wenn $a > b$ ist, so ist niemals $b > a$,
3. transitiv, d. h. aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.

Der Leser überzeuge sich nach dem vorher durchgerechneten Muster, daß diese drei Eigenschaften erfüllt sind. Wir müssen uns aber noch vergewissern, ob die Beziehung „größer“ unabhängig ist von der besonderen

Form der Zahlenpaare. Das heißt, wenn ein Zahlenpaar größer ist als ein zweites, so soll diese Beziehung auch gelten, wenn man die beiden Zahlenpaare durch irgendwelche andere, ihnen gleiche ersetzt.

Voraussetzung: $(a, b) > (c, d)$

$$(a, b) = (a', b'), \quad (c, d) = (c', d')$$

Behauptung: $(a', b') > (c', d')$

Beweis: Die Voraussetzung besagt:

$$a + d > b + c$$

$$a + b' = a' + b$$

$$c + d' = c' + d$$

Diese drei Gleichungen addieren wir, nachdem wir in der mittleren Gleichung die beiden Seiten vertauscht haben. Dann ergibt sich

$$a + b + c + d + a' + d' > a + b + c + d + b' + c'$$

$$\text{oder} \quad a' + d' > b' + c',$$

das ist aber gerade der Inhalt unserer Behauptung. Das Ergebnis ist somit: Die Beziehung „größer“ hat die drei formalen Eigenschaften des gewöhnlichen „größer“-Begriffes und sie ist weiters unabhängig von der besonderen Form, in welcher die Zahlenpaare dargestellt werden.

3. Definition von „kleiner“.

Wir sagen, ein Zahlenpaar sei kleiner als ein anderes, in Zeichen $(a, b) < (a', b')$, wenn $a + b' < a' + b$.

Hier sind genau dieselben Überlegungen anzustellen, wie in 2. — Wir sehen nun: Auf Grund der Definition von „=“, „>“, „<“ bilden die Zahlenpaare ein geordnetes System; d. h. zwischen zwei Zahlenpaaren besteht immer eine und nur eine von den drei Beziehungen „größer“, „gleich“, „kleiner“. Denn greifen wir irgend zwei Zahlenpaare (a, b) und (a', b') heraus, so haben wir, um ihre Ordnung festzustellen, nur die beiden Ausdrücke $a + b'$ und $a' + b$ zu vergleichen; diese sind natürliche Zahlen und für die gilt bereits, daß sie nur in einer der drei Beziehungen zueinander stehen; und von da überträgt sich das auf die Zahlenpaare.

Ferner ist leicht zu beweisen: Jedes positive Zahlenpaar ist größer als das Nullpaar; das Nullpaar ist größer als jedes negative Zahlenpaar; jedes positive Zahlenpaar ist größer als jedes negative Zahlenpaar.

Wir wollen nun zeigen, daß man mit Zahlenpaaren in ganz analoger Weise rechnen kann wie mit natürlichen Zahlen. Zu dem Zweck müssen wir definieren, was unter der Summe, der Differenz und dem Produkt zweier Zahlenpaare zu verstehen ist.

4. Definition der Summe.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Bevor man diese Definition annimmt, wird man prüfen müssen, ob die Summe diejenigen Eigenschaften hat, die dem Begriff der Summe in der gewöhnlichen Arithmetik zukommen. Diese Eigenschaften sind:

1. Die Summe existiert stets; d. h. zwei Zahlen a und b bestimmen stets eine dritte Zahl, ihre Summe.

2. Die Summe ist eindeutig bestimmt.

3. Es gilt das kommutative Gesetz: $a + b = b + a$.

4. Es gilt das assoziative Gesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

5. Es gilt das Gesetz der Monotonie: aus $b > c$ folgt $a + b > a + c$.

Erst wenn sich zeigt, daß diese Eigenschaften sämtlich erfüllt sind, sind wir berechtigt¹⁾, die hier eingeführte Verknüpfung „Addition“ zu nennen.

ad 1. Was bedeutet die Aussage, daß die Summe existiert? Sie bedeutet erstens, daß die Summe wieder die Form eines Zahlenpaares hat, daß man also, wenn man zwei Zahlenpaare additiv verknüpft, im Bereich der Zahlenpaare bleibt; und zweitens, daß dieses Zahlenpaar existiert, d. h. daß seine Bestandteile wieder natürliche Zahlen sind. Daß beide Forderungen erfüllt sind, liest man unmittelbar aus der Definition ab; da a, b, c, d natürliche Zahlen sind, so sind auch $a + c, b + d$ natürliche Zahlen.

ad 2. Diese Forderung bedeutet folgendes: Die Summe soll unabhängig sein von der besonderen Form der Summanden; ersetzt man die Zahlenpaare, die zu addieren sind, durch irgendwelche andere, ihnen gleiche, so soll sich die Summe nicht ändern.

Voraussetzung: $(a, b) = (a', b'), (c, d) = (c', d')$

Behauptung: $(a, b) + (c, d) = (a', b') + (c', d')$

Beweis: Führen wir die angegebene Addition aus, so haben wir zu zeigen, daß

$$(a + c, b + d) = (a' + c', b' + d');$$

das heißt

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d.$$

Diese Gleichung ist aber eine unmittelbare Folge der Voraussetzungen, wenn man diese als Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen schreibt.

Wir brechen hier ab, um nicht zu ermüden; dem Leser wird es nach dem Gesagten keine Schwierigkeit mehr bereiten, auch das Erfülltsein der Forderungen 3–5 nachzuweisen.

Bevor wir zur Subtraktion übergehen, wollen wir auf zwei Konsequenzen unserer Definition aufmerksam machen. Erstens geht aus ihr hervor, daß

¹⁾ Vgl. S. 51.

$(a, b) + (b, a) = (0, 0)$ ist. Solche Zahlenpaare wollen wir „inverse“ oder „entgegengesetzte“ Zahlenpaare nennen.

Zweitens ist

$$\begin{aligned}(a, b) + (a, b) &= (2a, 2b) \\ (a, b) + (a, b) + (a, b) &= (3a, 3b)\end{aligned}$$

und allgemein

$$\underbrace{(a, b) + (a, b) + \dots + (a, b)}_{n \text{ mal}} = (na, nb)$$

Statt zu sagen, das Zahlenpaar (a, b) ist n mal als Summand gesetzt, sagen wir auch „wir ver- n -fachen (a, b) “ und führen für diese Summe die kurze Bezeichnung $n \cdot (a, b)$ ein. Dann können wir das Ergebnis auch ausdrücken in der Form:

$$n \cdot (a, b) = (na, nb).$$

In Worten: ein Zahlenpaar wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man jedes Glied des Zahlenpaares mit dieser natürlichen Zahl multipliziert.

Aus diesen beiden Konsequenzen ergibt sich nun, daß sich jedes Zahlenpaar (a, b) in einer bestimmten Normalform darstellen läßt, nämlich in der Form

$$a(1, 0) + b(0, 1).$$

Denn führt man die angezeigten Operationen aus, so ergibt sich:

$$a(1, 0) + b(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Die Zahlenpaare $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sind das, was wir im gewöhnlichen Sprachgebrauch die positive, resp. negative Einheit nennen und für die wir die Bezeichnungen einführen:

$$\begin{aligned}(1, 0) &= +1 \\ (0, 1) &= -1;\end{aligned}$$

setzen wir ferner: $a \cdot (1, 0) = a \cdot (+1) = +a$

$$b \cdot (0, 1) = b \cdot (-1) = -b,$$

so können wir jedes Zahlenpaar in der Normalform darstellen:

$$(a, b) = (+a) + (-b).$$

5. Definition der Differenz.

Was soll unter der Differenz von zwei Zahlenpaaren verstanden werden? Es liegt nahe, nach Analogie mit der Summe folgende Definition aufzustellen:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

Diese Definition hat aber einen Haken: Wenn nämlich c größer als a oder d größer als b ist, dann existieren die Differenzen $a - c$, resp. $b - d$ nicht. Die Subtraktion im Bereich der Zahlenpaare wäre also nur unter bestimmten

Bedingungen ausführbar — während doch die Einführung der Zahlenpaare gerade den Zweck hat, die Subtraktion unbeschränkt ausführbar zu machen.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, erinnern wir daran, daß zwei inverse Zahlenpaare, zueinander addiert, das Nullpaar ergeben; da nun das Nullpaar, wie wir sehen werden, unter den Zahlenpaaren eine ganz ähnliche Stellung einnimmt wie die Null unter den natürlichen Zahlen, so kann man das Subtrahieren eines Zahlenpaares zurückführen auf das Addieren des inversen.

Demgemäß erklären wir:

$$(5) \quad (a, b) - (c, d) = (a, b) + (d, c) = (a + d, b + c)$$

Diese Definition ist von dem Mangel frei, der uns an der früheren gestört hatte. Das rechtsstehende Zahlenpaar existiert immer, d. h. die Subtraktion ist unbeschränkt ausführbar.

Daß die so definierte Verknüpfung wirklich die Eigenschaften der Subtraktion hat, geht aus dem oben Gesagten hervor. Zunächst ist sie die Umkehrung der Addition. Sie ist eindeutig bestimmt und für sie gilt weder das kommutative noch das assoziative Gesetz.

Bevor wir die Betrachtung der Subtraktion abschließen, wollen wir noch auf eine Anwendung der Definition (5) eingehen. Aus ihr folgt, daß speziell

$$(a, 0) - (b, 0) = (a, b)$$

ist, ein Resultat, das wir auch in der Form ausdrücken können

$$(a, b) = (+a) - (+b).$$

Jedes Zahlenpaar kann somit als Differenz zweier positiver Zahlen dargestellt werden.

Nimmt man die auf S. 29 abgeleitete Darstellung hinzu, so sieht man, daß

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$$

ist. Man könnte daher sagen: Schreiben wir kurzweg $(a, b) = a - b$, woraus hervorgeht, daß ein Zahlenpaar einfach eine Differenz zweier gewöhnlicher Zahlen ist. Wir widerstehen indes dieser Versuchung und haben bestimmte Gründe, an der komplizierteren Schreibweise $(a, b) = (+a) - (+b)$ festzuhalten.

Machen wir uns schließlich noch klar, daß die in dem letzten Ausdruck auftretenden Plus- und Minuszeichen eine ganz verschiedene Funktion haben. Die Pluszeichen sind V o r zeichen, während das Minuszeichen ein O p e r a t i o n s zeichen ist. Das Pluszeichen in $+a$ steht ja nur zur Abkürzung für $(a, 0)$ und kann entbehrt werden, wenn man sich der Schreibweise der Zahlenpaare bedient. Von dem Minuszeichen, das die beiden Zahlenausdrücke verbindet, gilt das keineswegs.

6. Multiplikation.

Aus der Erklärung der Summe folgt, daß $n(a, b) = (na, nb)$ ist. Wir wissen also schon, wie ein Zahlenpaar vervielfacht wird. Aber daraus können wir noch nicht schließen; wie ein Zahlenpaar mit einem anderen zu multiplizieren ist. Unsere bisherigen Bestimmungen geben dafür keinen Anhaltspunkt. Wir müssen vielmehr eine neue Definition aufstellen und erklären:

$$(6) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Dies ist eine willkürliche Festsetzung, und gerechtfertigt wird sie nur durch den Umstand, daß diese Operation tatsächlich einige besonders wichtige formale Eigenschaften der Multiplikation hat. Wir haben zu dem Zweck die Geltung folgender Sätze nachzuweisen:

1. Das Produkt zweier Zahlenpaare ist stets wieder ein Zahlenpaar.
2. Das Produkt ist eindeutig bestimmt, unabhängig von der besonderen Form der Zahlenpaare.
3. Es gilt das kommutative und
4. es gilt das assoziative Gesetz.

Um den Leser nicht zu ermüden, unterdrücken wir hier die ausführlichen Beweise. Nehmen wir an, daß der Nachweis erbracht ist; dann stimmt das Produkt zweier Zahlenpaare in den erwähnten Eigenschaften überein mit dem Produkt der gewöhnlichen Arithmetik, und das gibt uns das Recht, diese Verknüpfung mit dem Namen „Multiplikation“ zu belegen. Daß sich übrigens nicht alle Eigenschaften der gewöhnlichen Multiplikation auf die neue Operation übertragen lassen, zeigt das Aufhören der Geltung des „Monotoniegesetzes“. Der Satz, aus $B > C$ folgt $AB > AC$, gilt hier nicht allgemein, sondern nur unter der Einschränkung, daß der Faktor A positiv ist.

Aus unserer Definition (6) ergaben sich insbesondere die folgenden Beziehungen:

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = (1, 0)$$

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1)$$

$$(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 1)$$

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (1, 0)$$

Diese besagen aber gar nichts anderes als die Vorzeichenregeln:

$$(+1) \cdot (+1) = +1$$

$$(+1) \cdot (-1) = -1$$

$$(-1) \cdot (-1) = -1$$

$$(-1) \cdot (+1) = -1$$

Man sieht, daß sie aus der Erklärung der Multiplikation der Zahlenpaare fließen, die an sich willkürlich ist und nur deshalb gerade in der angegebenen

Weise getroffen wurde, damit sie die wichtigsten Eigenschaften der Multiplikation der natürlichen Zahlen wiedergebe.

Diese Tatsache war schon Gauß bekannt; im Jahre 1811 schrieb er an Bessel: „Man sollte nie vergessen, daß die Funktionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen, nur unsere eigenen Geschöpfe sind und daß, wo die Definition, von der man ausging, aufhört, einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll, was ist, sondern was konveniert anzunehmen? damit ich immer konsequent bleiben kann. So.z. B. das Produkt aus Minus mal Minus.“ Und Hankel sagt in seinem bereits erwähnten Werk über die Vorzeichenregel: „Es kann gegenüber einer sehr stark verbreiteten, allgemeinen Ansicht nicht scharf genug hervorgehoben werden, daß diese Gleichungen in der formalen Arithmetik nimmer bewiesen werden können; es sind arbiträre Konventionen, zugunsten der Erhaltung des Formalismus im Kalkül.“

7. Division.

Eine Bemerkung sei schließlich noch über die Division gemacht. Daß diese Operation aus dem Bereich der ganzen Zahlen hinausführt, wissen wir bereits. Wie äußert sich diese Tatsache in dem von uns aufgestellten Kalkül?

Setzen wir vorläufig das Ergebnis der Division in unbestimmter Form an:

$$(a, b) : (c, d) = (x, y).$$

Wenn diese Division die Umkehrung der Multiplikation sein soll, so muß

$$(a, b) = (c, d) \cdot (x, y)$$

$$\text{das heißt } (a, b) = (c x + d y, d x + c y)$$

sein; diese Gleichung kann aber nach Definition (1) nur dann bestehen, wenn

$$a + d x + c y = b + c x + d y.$$

Die Division ist demnach nur ausführbar, wenn sich zwei natürliche Zahlen x, y finden lassen, welche dieser letzten Gleichung Genüge leisten; es ist dies eine sog. „Diophantische Gleichung“, und zahlentheoretische Untersuchungen (auf die wir hier nicht eingehen wollen) lehren, daß eine solche Gleichung nur unter ganz bestimmten Bedingungen lösbar ist; (so sieht man etwa, daß die Gleichung $3x = 2y + 4$ gewiß keine Lösung in natürlichen Zahlen hat, denn die rechte Seite der Gleichung ist durch 2 teilbar, die linke nicht). Das heißt aber, daß die Division im Bereich der ganzen Zahlen nicht unbeschränkt ausführbar ist. —

Blicken wir nun auf den von uns durchmessenen Weg zurück! Das Problem war: Wie kann man, unter alleiniger Zugrundelegung des Systems

der natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen so einführen, daß dabei weder von einer Hypothese noch von einem Postulat Gebrauch gemacht wird? Der vorliegende Aufbau gibt die Antwort auf diese Frage. Wir haben aus dem Material der natürlichen Zahlen neue Gebilde aufgebaut und sie kraft willkürlicher, aber zweckentsprechender Festsetzungen mit solchen Eigenschaften ausgestattet, daß sie alles das leisten, was die ganzen Zahlen leisten sollen. Wir brauchen also nur den letzten Schritt zu tun und die von uns geschaffenen Gebilde geradezu als Zahlen ansprechen.

Nur ein Punkt bleibt dabei problematisch: Können unsere Festsetzungen nicht in Konflikt miteinander geraten? Solange man in der Arithmetik der ganzen Zahlen Wahrheiten erblickte, die etwa auf einer inneren Evidenz beruhen, war diese Frage bedeutungslos; in einem System jedoch, dessen Grundsätze den Charakter willkürlicher Verabredungen haben, besteht keine Gewähr dafür, daß diese nicht zu einem Widerspruch führen. Eine formale Theorie erfordert den Nachweis der Widerspruchsfreiheit, und dieser Nachweis erst wird den Schlußstein des ganzen Aufbaues bilden.

Beim Aufstellen der Rechengesetze für Zahlenpaare hatte uns der Kalkül mit Differenzen als Muster gedient; unsere sechs Definitionen sind den sechs Formeln auf S. 22 f. genau nachgebildet. Wäre es möglich, aus unseren Festsetzungen jemals durch logisches Schließen einen Widerspruch herzuleiten, so müßte sich genau dieselbe Schlußkette im Gebiet der Kardinalzahlen herstellen lassen, nur daß sie dort von den entsprechenden Formeln des Differenzenkalküls ausgeht; denn die Struktur der Formeln ist ja genau die gleiche, und nur auf diese Struktur kommt es bei den Schlußprozessen an. Demnach müßten auch diese Formeln einen Widerspruch in sich bergen; damit erkennen wir aber: Die Arithmetik der Zahlenpaare ist gewiß dann widerspruchsfrei, wenn es die Arithmetik der natürlichen Zahlen ist.

Zum Abschluß wollen wir noch auf eine wichtige Frage eingehen: Wie verhalten sich die ganzen zu den natürlichen Zahlen? Sind sie eine Erweiterung derselben? Das war lange die Ansicht der Mathematiker. Man setzte in dieser Auffassung die natürlichen Zahlen den positiven gleich und meinte, daß sie nur dort „positive Zahlen“ genannt werden, wo man sie von den negativen Zahlen unterscheiden will. Aber schon der Sprachgebrauch enthält Hinweise, daß zwischen Anzahlen und positiven Zahlen wohl zu unterscheiden ist. Wenn ich sage, daß ich drei Gäste eingeladen habe, so kann ich hierin das Zahlwort „drei“ durch jedes andere ersetzen; aber nicht durch das Zeichen „+ 3“, weil es sonst auch Sinn haben müßte, von der Einladung von — 3 Gästen zu reden. „3“ und „+ 3“ haben sozusagen eine verschiedene logische Grammatik; der sorgfältige Aufbau der Arithmetik bestätigt das. Die negativen Zahlen sind keine nachträgliche Ergänzung

der natürlichen Zahlen. In Wirklichkeit sind es zwei ganz getrennte Zahlensysteme. Gerade bei unserem Aufbau tritt das sehr klar hervor: Eben weil die positiven Zahlen Zahlenpaare sind, sind sie von den natürlichen Zahlen scharf geschieden; deshalb haben wir sie auch nicht als Differenzen zweier gewöhnlicher Zahlen gedeutet.

Natürliche Zahlen und ganze Zahlen bilden also zwei gesonderte Systeme; sie gehören sozusagen zwei verschiedenen Ebenen an. Nur bestehen gewisse Beziehungen zwischen ihnen, die bei oberflächlicher Betrachtung den Eindruck erwecken, als ob das erste System ein Teil des zweiten sei. Wir wollen nachsehen, worin diese Beziehungen bestehen. Jeder natürlichen Zahl entspricht eine positive Zahl

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 +1 & +2 & +3 & +4 \dots
 \end{array}$$

und zwar so, daß die Ordnung und Verknüpfung der natürlichen Zahlen genau dieselbe ist wie die Ordnung und Verknüpfung der entsprechenden positiven Zahlen. Genauer gesagt: die Zuordnung zwischen den beiden Reihen hat folgende drei Eigenschaften:

1. Sie ist ein-eindeutig: jeder natürlichen Zahl ist eine positive zugeordnet und umgekehrt.

2. Die innere Ordnung der Zahlindividuen bleibt bei dieser Entsprechung erhalten: ist a größer (kleiner) als b , so ist auch die entsprechende positive Zahl $+a$ größer (kleiner) als die entsprechende positive Zahl $+b$.

3. Den Verknüpfungen der Zahlen durch die vier Grundspezies in der einen Reihe entspricht genau die Verknüpfung der Zahlen in der andern Reihe; ist z. B. $a + b = c$, so ist auch $(+a) + (+b) = +c$; und analog im Falle der anderen Operationen.

Statt dessen wollen wir kürzer sagen: die Zuordnung ist ein-eindeutig, ähnlich und isomorph. Darauf beruht es, daß alle Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen bei den positiven wiederkehren, sodaß das eine System als treue Kopie des andern erscheint.

Liegen allgemein zwei Zahlensysteme vor, S mit den Elementen a, b, c, \dots und S' mit den Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, dann heißt eine Abbildung von S und S' isomorph, wenn das Ergebnis der Verknüpfungen $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha : \beta$ auch stets dem Ergebnis der Verknüpfungen $a + b, a - b, a \cdot b, a : b$ zugeordnet ist.

Man darf nicht glauben, daß der Isomorphismus schon aus der Eineindeutigkeit und Ähnlichkeit der Beziehungen folgt. Ein einfaches Gegen-

beispiel ist dieses: Ordnet man die Reihe der natürlichen Zahlen der Reihe der geraden Zahlen in der Weise zu, wie es die Pfeile andeuten:

1	2	3	4	5	6	. . .
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
2	4	6	8	10	12	. . .

so ist die so bewirkte Zuordnung eindeutig und ähnlich, aber nicht isomorph; das Produkt der Zahlen 2 und 3 in der ersten Zeile ergibt z. B. 6, das Produkt der entsprechenden Zahlen in der zweiten Reihe 24; 6 und 24 sind aber einander nicht zugeordnet.

Zusammenfassend können wir somit sagen: Die natürlichen Zahlen bilden keine Provinz der ganzen Zahlen; wohl aber enthalten die letzteren ein echtes Teilsystem — die positiven Zahlen — das dem System der natürlichen Zahlen eineindeutig, ähnlich und isomorph zugeordnet ist.

Was leistet nun das neue System? Werden mit seiner Hilfe Aufgaben lösbar, welche mit Hilfe des alten Systems nicht gelöst werden konnten? Auch da werden wir zu einer etwas anderen Auffassung kommen.

Streng genommen wird ja die Aufgabe, von der Zahl 4 die Zahl 7 abzuziehen, durch die Einführung negativer Zahlen nicht gelöst; sondern eine andere Aufgabe, nämlich die, von der Zahl +4 die Zahl +7 abzuziehen. Diese neue Aufgabe ist das Analogon zu der ursprünglichen im Bereich der ganzen Zahlen. Ein unlösbares Problem geht also niemals durch Erfindung neuer Zahlen in ein lösbares über — das wäre eine etwas oberflächliche und falsche Auffassung — sondern es ist so, daß sich die Aufgabe sozusagen in eine andere Zahlenebene projizieren läßt und daß die ihr dort entsprechende Aufgabe eine Lösung besitzen kann.

Historisch haben sich die Dinge natürlich nicht so entwickelt. Die negativen Zahlen sind nicht mit einem Schlag in die Mathematik eingeführt worden, sondern haben sich in der Praxis des Rechnens gleichsam von selbst aufgedrängt. Wahrscheinlich sind sie eine Erfindung der Inder, denen wir ja auch unser Ziffernsystem verdanken. Im Abendland treten sie erst auf zur Zeit der Renaissance, als sich die Buchstabenrechnung eingebürgert hatte. Vor allem sind es Gleichungsaufgaben, die mit einem gewissen inneren Zwang zu den negativen Zahlen hinführten. So gelangt z. B. Chuquet in seinem Werk „Le Triparty en la Science des Nombres“ (1484) bei der Aufgabe, eine Zahl nach einer bestimmten Vorschrift zu zerlegen, zu negativen Lösungen. Daß man diese neuen Zahlen zuerst mit einigem Mißtrauen ansah, bezeugen Benennungen der damaligen Zeit, wie „absurde Zahlen“ (M. Stifel), „numeri ficti“ (G. Cardano) und dgl. Ein so hervorragender Algebraiker wie Vieta (1540—1603) wollte sie noch grundsätzlich aus der Mathematik ausschließen — eine Einstellung, in der ihm manche englische Mathematiker bis zum Ende

des 18. Jahrhunderts gefolgt sind, die hauptsächlich an der unklaren Begründung der Vorzeichenregel Anstoß nahmen. Wie wenig selbst bedeutende Mathematiker die Verhältnisse überblickten, zeigt das Beispiel von Wallis (1616—1703), der in den negativen Zahlen „überunendliche“ Größen erblicken wollte.

Er argumentierte wie folgt: die Zahlen

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$$

bilden eine wachsende Reihe; allgemein ist

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1},$$

für $m = 0$ ergibt sich hieraus

$$\frac{1}{0} < \frac{1}{-1},$$

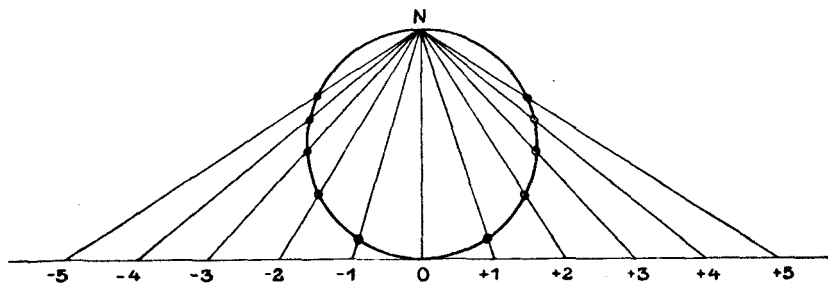
d. h. $\infty < -1$. Die negativen Zahlen sind daher größer als ∞ , „plus quam infiniti“.

In Wirklichkeit ist natürlich die Sache die, daß $\frac{1}{0}$ kein Symbol ist, für welches eine Größenverglei chung definiert ist, sodaß man die Formel

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1}$$

nicht auf den Fall $m = 0$ ausdehnen darf, Klarheit brachte erst das 19. Jahrhundert; in M. Obms „Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik“ (1822) wird zum erstenmal das Prinzip der Erweiterung des Zahlbereiches deutlich ausgesprochen. Die führende Stellung des Permanenzprinzips hat dann H. Hankel erkannt.

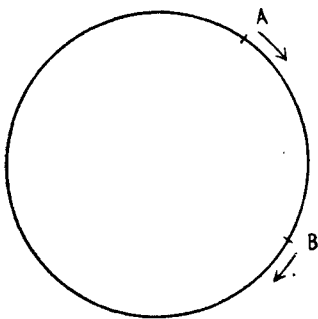
Wir könnten übrigens der Idee von Wallis einen klaren Sinn geben, wenn wir unsere Vorstellung von der Zahlenlinie ein wenig abändern. Wir wollen uns zu dem Zweck ein anderes geometrisches Modell der reellen Zahlen, den „Zahlenkreis“ konstruieren. Wenn wir die Punkte der Zahlenlinie durch „Zentralprojektion“ auf die Punkte eines Kreises abbilden, wie es die unten-



Figur 7.

stehende Figur zeigt, so ist klar, daß jeder positiven oder negativen Zahl ein ganz bestimmter Punkt auf dem Zahlenkreis zugeordnet ist und umgekehrt. Nur ein einziger Punkt macht eine Ausnahme: das Projektionszentrum N , dem offenbar kein Punkt auf der Zahlengeraden, somit keine reelle Zahl entspricht. Wir hätten also zu sagen, daß zwischen den Punkten des Kreises und den reellen Zahlen eine ein-eindeutige Entsprechung besteht, mit alleiniger Ausnahme des Punktes N . Nun trachtet der Mathematiker, so oft er auf Ausnahmen stößt, eine solche Formulierung zu finden, daß er sich von der Ausnahme befreit. So kann der Satz „Jede quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln“ nur aufrecht erhalten werden, wenn man sich entschließt, in Fällen, wo keine zwei verschiedenen Wurzeln existieren, die eine Wurzel doppelt zu zählen. So werden wir jetzt eine reelle Zahl einführen, welche dem Punkt N entspricht. Wandert ein Punkt auf der Zahlengeraden immer weiter hinaus (gleichviel ob nach links oder nach rechts), so rückt sein Bild immer weiter an N heran. Wir wollen nun sagen, die Gerade besitzt einen einzigen unendlich fernen Punkt, das Bild der Zahl ∞ .

Der Leser wird sich gegen diese Annahme sträuben. Die Punkte einer Geraden, so wird er sagen, sind objektiv gegeben und ich kann nicht durch meinen Willen einen neuen Punkt hinzuschaffen. Über die Punkte einer Geraden darf ich treilich nicht verfügen, wohl aber über meine Sprechweise; und die hier vorgeschlagene hat jedenfalls den Vorzug, daß sie die Entsprechung zwischen den Punkten auf dem Kreis und den reellen Zahlen zu einer lückenlosen macht. Durch die Hinzunahme des „uneigentlichen Punktes“ ist die Gerade zur Trägerin einer „zyklischen Ordnung“ geworden und wir können jetzt Wallis' Idee folgenden Sinn unterlegen: Gewöhnlich gelangen wir von den positiven zu den negativen Zahlen, indem wir durch 0 hindurchgehen; wir könnten aber auch den Weg über ∞ nehmen, und in diesem Sinn hat Wallis ganz recht, wenn er die negativen Zahlen als über-



Figur 8.

unendlich bezeichnet. „Wie verhält es sich aber in Wirklichkeit? Sind die negativen Zahlen größer oder kleiner als die positiven?“ Der Leser wird bemerken, daß die beiden Auffassungen auf zwei verschiedene Anordnungen der reellen Zahlen hinauslaufen. Sagen wir es so: Wenn man zu den Punkten der Zahlenlinie noch die uneigentliche Zahl ∞ hinzunimmt, dann ist die Zahlenlinie geschlossen, gerade so wie der Kreis. Von den Punkten eines Kreises kann man z. B. nicht sagen, welcher dem andern

vorangeht. Man kann z. B. ebensogut von A nach B gelangen, wie von B

nach A und zwar durch Fortbewegung im selben Sinn. Und greift man drei beliebige Punkte auf der Kreislinie heraus, so kann man von jedem mit gleichem Recht behaupten, daß er zwischen den beiden andern liegt. Der Begriff des „zwischen“ verliert hier seinen Sinn. Kurz, hier liegt eine ganz andere Ordnung vor als auf einer Geraden.

Nun kann man aber den Punkten eines Kreises auch eine lineare Ordnung aufprägen; zu diesem Zweck brauchen wir nur einen Punkt zu tilgen, also den Zusammenhang der Linie zu unterbrechen und von da aus die Punkte willkürlich in einem bestimmten Sinn zu durchlaufen. Tilgen wir den Punkt ∞ , so kommen wir auf die gewöhnliche Anordnung der reellen Zahlen (Fig. a); tilgen wir aber 0, so kommen wir zu der Anordnung von Wallis (Fig. b).

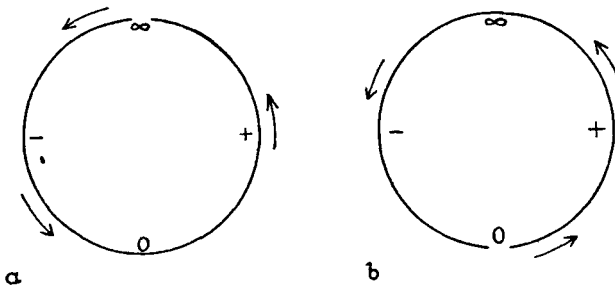


Fig. 9.

Wir lernen hier ein Beispiel dafür kennen, daß die Erweiterung des Zahlenbereiches nicht immer auf eine Weise möglich ist. Tatsächlich liegen hier zwei ganz verschiedene Zahlensysteme vor. Fragt man nach dem inneren Grund für diese Erscheinung, so ist zu sagen, daß das Permanenzprinzip, das uns doch bei der Erweiterung des Zahlenbereiches leiten soll, in diesem Fall versagt, oder richtiger, daß dieses Prinzip die Begriffsbildung nicht mehr eindeutig reguliert. Es fordert nur, daß die Erweiterung des Begriffsystems so vorgenommen werde, daß die formalen Gesetze so weit wie möglich aufrecht erhalten werden, d. h. daß gewisse uns besonders wichtige Gesetze in Geltung bleiben und nicht, daß sie alle erhalten bleiben. Tatsächlich müssen wir uns damit abfinden, daß beim Aufstieg zu einem weiteren Zahlbereich die Geltung gewisser Rechengesetze des alten verloren geht. So gelang der Schritt von den natürlichen zu den ganzen Zahlen nur um den Preis, daß man auf die Geltung des Monotoniegesetzes der Multiplikation verzichtete. Es wird also im allgemeinen nur ein Teil der alten Rechengesetze im neuen, weiteren Gebiet fortbestehen. Es kann nun geschehen, daß sich für die Erweiterung des Zahlenbereiches verschiedene Wege bieten und daß man dabei jedesmal auf ein anderes Rechengesetz

verzichten muß. Eben dieser Fall tritt hier ein. Entweder hält man nämlich an der Geltung der Formel

$$m > m - 1$$

für $m = 0$ fest, dann muß man die Formel

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1}$$

opfern. Oder man kann die Erweiterung so vornehmen, daß die zweite Formel intakt bleibt, dann muß man die erste aufgeben. Zusammenfassend ist zu sagen, daß das Permanenzprinzip kein zuverlässiger Führer ist, daß es uns die Wahl läßt zwischen zwei Wegen, die zu verschiedenen Anordnungen der reellen Zahlen, also zu zwei verschiedenen Zahlensystemen führen.

5. Die rationalen Zahlen.

Viel älter als die negativen sind die rationalen Zahlen. Während jene erst auftreten, sobald eine bestimmte Stufe der Mathematik erklommen ist, die Stufe der Algebra, drängt schon das Bedürfnis des täglichen Lebens, etwa die Ausbildung eines Münz- und Gewichtssystems zur Einführung der gebrochenen Zahlen. Das läßt auch der Sprachgebrauch erkennen: Während die Bezeichnungen für die positiven und negativen Zahlen erst im 17. Jahrhundert auftreten, weisen schon die Umgangssprachen der Kulturvölker Ausdrücke für Bruchteile auf. Dennoch hat sich der Begriff der rationalen Zahl, wie wir ihn heute haben, erst verhältnismäßig spät herauskristallisiert. „Für unser heutiges Empfinden sind die verschiedenen Bruchbegriffe nicht mehr wesentlich voneinander unterschieden. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{17}{25}$ erscheinen uns grundsätzlich gleichwertig und auch unsere einheitliche Bezeichnungsweise durch Zähler und Nenner unterstreicht diesen Sachverhalt. Daß dies aber keineswegs immer der Fall gewesen ist, zeigt schon z. B. der Umstand, daß im Ägyptischen für Brüche wie $\frac{17}{25}$ überhaupt keine Bezeichnung existiert, für $\frac{1}{20}$ nur eine ohne Kennzeichnung des Zählers 1 und für $\frac{1}{2}$ ein ganz anderes Symbol verwendet wird wie für die anderen Brüche.“ (O. Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, S. 86.) Es scheint, daß in früheren Zeiten gewisse Brüche, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ als selbständige und individuelle Zahlen angesehen wurden, die nicht als sekundäre Bildung von den entsprechenden ganzen Zahlen abgeleitet sind. Diese „natürlichen Brüche“, die vielleicht mehr eine gestalthafte, qualitative Bedeutung haben mochten, wurden erst später, bei der Ausbildung des Rechnens, in ein System eingegliedert, und damit entstand erst das, was wir heute das System der Rationalzahlen nennen.

Geschichtlich gesehen liegen hier jedenfalls komplizierte Prozesse vor, die allem Anschein nach zunächst an die vorhandenen sprachlichen Ausdrucksmittel ansetzen. Die Herrschaft eines bestimmten Zeichensystems ist nie gleichgültig. Das vorhandene Schriftsystem bestimmt in weitem Sinn die Entwicklungsmöglichkeiten der Mathematik. Wie die Beschränkung auf ein bestimmtes Baumaterial (Quadern, Ziegel, Holz) die Architektur zu gewissen Formen hindrängt, stilbildend wirkt, so bringt auch die Verwendung einer bestimmten Notation, die nur gewisse Ausdrücke kennt, andere nicht, etwas wie einen Stil mathematischen Denkens hervor. Die

Ägypter hatten z. B. eine Bezeichnungsweise, mit der sie nur die reziproken Werte der ganzen Zahlen und deren Komplemente (d. h. die Brüche $\frac{1}{n}$ und $1 - \frac{1}{n}$) ausdrücken konnten. Dadurch wurde die ägyptische Mathematik in ganz bestimmte Fragestellungen hineingedrängt (Stammbruchzerlegungen), während der Zugang zu anderen Problemen so gut wie abgeschnitten war.

So entstand in den Fragestellungen und Lösungen etwas, wie ein bestimmter Stil. Die Griechen, für welche das einzige Ausdrucksmittel des mathematischen Gedankens die geometrische Figur war, wurden dadurch wieder an gewissen Möglichkeiten der modernen Mathematik vorbeigeführt, vor allem an der Erfassung des allgemeinen Zahlbegriffes. Daß andererseits die Babylonier eine Algebra von erstaunlicher Höhe hervorbrachten, scheint tief mit der Struktur ihrer Sprache und Schrift zusammenzuhängen.

Wir wollen einen Augenblick versuchen, die Fragen, die sich hier aufdrängen, etwas deutlicher zu formulieren. Wir verwenden heute zwei Arten von Schriften: entweder stellt ein Zeichen einen Laut dar, wie „r“ oder „o“; oder einen Begriff, wie „3“ oder „+“. Demgemäß unterscheidet man zwischen Lautschrift und Begriffsschrift (Ideographie). Jede Begriffsschrift ist, wie wir heute wissen, ursprünglich aus einer Bilderschrift hervorgegangen, die nur konkrete sinnliche Dinge oder Vorgänge wiedergab. Die Frage ist nun die: Wie konnte sich aus einer anschaulichen Bilderschrift ein abstrakter mathematischer Formalismus lösen mit konventionellen Einzelsymbolen für Größen und für Operationen? Oder wie konnten aus einer Buchstabenschrift, die dem Lautbild des Wortes folgt, die Begriffszeichen der Mathematik hervorwachsen? Beides erscheint schwer verständlich, da die mathematischen Symbole sozusagen nicht in der Richtung der natürlichen Entwicklung der Sprachsysteme liegen. Und doch ist das Auftreten einer Begriffsschrift grundlegend für die Entfaltung mathematischen Denkens. In Ägypten mit seiner historischen Kontinuität ist dieser Schritt nicht geschehen. In Babylon, wo sich zwei ganz verschiedene Kulturen, das Sumerische und das Akkadische (mit Sprachen mit grundverschiedenem grammatischen Typus) übereinanderschichten, ist der Weg für eine solche formale Entwicklung frei geworden. Durch die Berührung dieser beiden verschiedenen Sprachen entstand nämlich die Möglichkeit, ein Wort entweder syllabisch zu schreiben oder mittels eines Ideogramms. In den akkadischen Texten wechseln beide Schreibweisen willkürlich miteinander ab, und das bot nun die Möglichkeit, die mathematischen Begriffe (Größen und Operationen) ideographisch zu schreiben und so zu einer Formelsprache zu gelangen, während der übrige Text syllabisch geschrieben ist. Es waren also nicht rationale Überlegungen, sondern eher historische Zufälle — das Zusammentreffen verschiedener Kulturen — die zur Ausbildung einer mathematischen Zeichensprache führten.

Vielleicht ist es so, „daß im Rahmen einer kontinuierlichen geschichtlichen Entwicklung, die ja auf der direkten Tradition von Generation zu Generation beruht, das Bewußtsein der Willkürlichkeit und des rein konventionellen Charakters aller Ausdrucksmittel gar nicht entsteht, da alle diese Dinge zu absoluten und gegebenen Formen werden, die aus freien Stücken wesentlich abzuändern das analytische Vermögen der Menschen weit übersteigt. Erst Menschen, die selbst einer ganz anderen geschichtlichen Tradition entstammen, sind imstande, die fremden Ausdrucksmittel frei zu gebrauchen und ihre Schranken wie ihre Möglichkeiten zu erkennen“. (Neugebauer, S. 78.)

Indem wir in allen diesen Dingen auf die Vorlesungen von Neugebauer verweisen, die dem Zusammenhang zwischen Mathematik und Sprache nachgehen, wollen wir jetzt unsere Frage nach einer anderen Richtung präzisieren. Wir forschen nicht danach, wie sich das Bruchrechnen entwickelt hat und welche Momente den Anstoß dazu gegeben haben; uns interessiert nur die Frage, mit welchem Recht die gebrochenen Zahlen in die Arithmetik eingeführt werden. Genau so, wie wir die ganzen Zahlen aus dem Material der natürlichen Zahlen aufgebaut haben, werden wir jetzt die rationalen Zahlen mit Hilfe der ganzen konstruieren. Da die Grundsätze dieser Methode bereits im vorigen Kapitel erörtert worden sind, werden wir uns diesmal wesentlich kürzer fassen können.

Als Vorbereitung für den weiteren Aufbau wollen wir folgende Frage behandeln: Gesetzt, wir betrachten Divisionen, die aufgehen; kann man mit den Ergebnissen solcher Divisionen operieren, ohne sie wirklich ausführen zu müssen? Dieser Gedanke ist ziemlich naheliegend; die Divisionen $48 : 3$ und $80 : 5$ liefern z. B. dasselbe Ergebnis, und das muß sich doch irgendwie an den in der Rechnung auftretenden Zahlen selbst zu erkennen geben. Und könnte man nicht auch zwei Divisionen ansehen, welche von ihnen das größere Ergebnis liefern wird? Mit einem Wort, könnte man nicht eine Art Kalkül mit Quotienten aufstellen, in dem man tatsächlich nur mit Dividend und Divisor rechnet? Daß das möglich ist, werden wir sofort erkennen. Dabei werden wir durchaus auf dem Boden der ganzen Zahlen bleiben, d. h. jeder Satz, den wir aussprechen werden, wird innerhalb der Arithmetik der ganzen Zahlen beweisbar sein. Um dann die Brüche zu erhalten, werden wir uns von der Annahme, daß die Division aufgehen soll, befreien und die Sätze, die in der Arithmetik der ganzen Zahlen beweisbar waren, als Rechenregeln für beliebige Zahlenpaare aussprechen. Der Kalkül mit Zahlenpaaren wird sich so ganz natürlich an den Kalkül mit Quotienten anschließen. Unserem Vorhaben gemäß fragen wir:

1. Wann sind zwei Quotienten gleich?
2. Wann ist ein Quotient größer resp. kleiner als ein anderer?

3. Wie kann man Quotienten addieren, subtrahieren usw.?

ad 1. Welche Beziehung muß zwischen vier Zahlen a, b, c, d bestehen, wenn die Divisionen $a : b$ und $c : d$ das gleiche Ergebnis liefern sollen?

Man wird sagen, in diesem Fall müssen die Zahlen a, b, c, d eine Proportion bilden und die ist bekanntlich nur dann richtig, wenn $a d = b c$ ist. Allein, die Lehre von den Proportionen, wie sie gewöhnlich dargestellt wird, setzt schon das System der rationalen Zahlen voraus, das wir doch erst aufbauen wollen; wir müssen vorsichtiger zu Werke gehen.

Zuerst beweisen wir, daß das Resultat einer Division ungeändert bleibt, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziert; wenn also

$$a : b = q$$

ist, so soll auch

$$n a : n b = q$$

sein.

Da zufolge der ersten Gleichung

$$a = b \cdot q$$

ist, so muß auch

$$n a = n b \cdot q$$

sein und das ist in der Tat der Sinn der zweiten Gleichung. (Der Leser beachte, daß wir mit dieser Ableitung nirgends den Bereich der ganzen Zahlen überschritten haben!) Auf ganz dieselbe Art erkennt man, daß zwei Quotienten mit gleichen Divisoren nur dann gleich sind, wenn sie auch gleiche Dividenten haben.

Sollen wir nun entscheiden, ob irgend zwei Divisionen

$$a : b \quad \text{und} \quad c : d$$

das gleiche Ergebnis liefern, so werden wir von dem eben bewiesenen Satz Gebrauch machen und ihnen eine solche Form geben, daß sie in den Divisoren übereinstimmen. Dann werden sie nur dann dasselbe Resultat haben können, wenn auch ihre Dividenten gleich sind. Wir erweitern zu diesem Zweck den ersten Quotienten mit d , den zweiten mit b und lesen aus den so erhaltenen Quotienten

$$a d : b d \quad \text{und} \quad b c : b d$$

ab, daß sie dann gleich sind, wenn

$$a d = b c \quad \text{ist.}$$

ad 2. Zugleich haben wir damit die Antwort auf die zweite Frage gefunden: Die Division $a : b$ hat ein größeres, resp. kleineres Ergebnis als die Division $c : d$, je nachdem ob $a d$ größer resp. kleiner ist als $b c$.

Zusammenfassend können wir sagen: es ist

$$a : b \begin{matrix} \succ \\ \simeq \\ \prec \end{matrix} c : d, \text{ je nachdem } a d \begin{matrix} \succ \\ \simeq \\ \prec \end{matrix} b c \text{ ist.}$$

ad 3. Wie kann man eine Division bilden, deren Ergebnis gerade so groß ist wie die Ergebnisse zweier anderer Divisionen zusammengenommen?
Die Division

$$(a d + b c) : b d$$

hat die verlangte Eigenschaft. Zunächst ist

$$(a d + b c) : b d = (a d : b d) + (b c : b d)$$

auf Grund eines Satzes, den man in der Arithmetik der ganzen Zahlen beweisen kann; jede der beiden Divisionen läßt sich weiter durch einen gemeinsamen Faktor kürzen, sodaß wir schließlich erhalten:

$$(a d + b c) : b d = (a : b) + (c : d).$$

In ganz analoger Weise läßt sich offenbar die Differenz der Quotienten bilden.

Wünscht man die Quotienten zu multiplizieren, so braucht man die Multiplikation nur in den Dividenden und Divisoren auszuführen. Ist nämlich

$$a : b = q \quad \text{und} \quad c : d = r,$$

so ist

$$a = b q \quad \text{und} \quad c = d r$$

und durch Multiplikation ergibt sich hieraus

$$a c = b d \cdot q r, \quad \text{das heißt} \quad a c : b d = q r.$$

Man sieht hieraus, daß die letzte Division ein Ergebnis liefert, das gerade so groß ist wie das Produkt der Ergebnisse der beiden ursprünglichen Divisionen. — Der Leser versuche sich an dem Beweise, daß

$$(a : b) : (c : d) = a d : b c \text{ ist.}$$

Was haben wir nun mit diesen Sätzen gewonnen? Die Einsicht, daß sich mit Quotienten ebenso rechnen läßt wie mit Zahlen. Wir kommen nun zu dem entscheidenden Schritt: Wir werden diesen Kalkül auf beliebige Zahlenpaare ausdehnen und die eben bewiesenen Formeln als Definitionen der Begriffe „gleich“, „größer“, „kleiner“, „Summe“, „Differenz“ usw. ansehen.

1. Definition der Gleichheit.

Wir betrachten Zahlenpaare, mit denen wir vorläufig noch gar keinen weiteren Sinn verbinden. Wir definieren:

$$(a, b) = (c, d), \quad \text{wenn} \quad a d - b c = 0.$$

Wir wissen aus dem vorigen Kapitel, welche Forderungen an eine willkürliche Definition des Gleichheitsbegriffes zu stellen sind: Die so definierte Beziehung muß reflexiv, symmetrisch, transitiv sein. Daß die beiden ersten Eigenschaften erfüllt sind, sieht man ohne jede Rechnung.

Eine kleine Überlegung erfordert hingegen der Nachweis der Transitivität; diese besteht in folgendem:

$$\text{Ist} \quad (a, b) = (a', b')$$

$$\text{und} \quad (a', b') = (a'', b'')$$

so ist auch stets

$$(a, b) = (a'', b'').$$

Die beiden ersten Gleichungen besagen nach (1)

$$a b' - a' b = 0$$

$$a' b'' - a'' b' = 0,$$

und die Behauptung ist, daß dann auch

$$a b'' - a'' b = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit b'' , die zweite mit b und addiert beide, so erhält man

$$a b' b'' - a'' b b' = 0,$$

$$\text{das heißt} \quad b' (a b'' - a'' b) = 0.$$

Folgt nun hieraus, daß $a b'' - a'' b = 0$ ist? Nur dann, wenn b' von 0 verschieden ist. Wäre $b' = 0$, so könnte sehr wohl das erste Zahlenpaar gleich dem zweiten, das zweite gleich dem dritten sein, ohne daß das erste gleich dem dritten ist. Die Transitivität ist also nur dann verbürgt, wenn der Fall $b' = 0$ nicht eintreten kann. Demgemäß verlangen wir, daß Zahlenpaare mit dem Hinterglied 0 ausgeschlossen werden sollen; (in der gewöhnlichen Ausdrucksweise heißt das: wir schließen die Division durch 0 aus).

Eine einfache Folge dieser Definition ist es, daß man jedes Zahlenpaar in unendlich viele Formen setzen kann. So ist

$$(a, b) = (2 a, 2 b) = (3 a, 3 b) = \dots$$

(Das besagt, daß man einen Bruch mit einer beliebigen Zahl erweitern darf.)

2. Größer und kleiner.

Wir definieren:

$$(a, b) < (c, d), \text{ wenn } ad - bc < 0$$

$$(a, b) > (c, d), \text{ wenn } ad - bc > 0$$

Der Beweis, daß die so definierte Beziehung irreflexiv, asymmetrisch, transitiv ist, bereitet keine Mühe. Wir übergehen ihn.

Aus den Definitionen (1) und (2) läßt sich nun der wichtige Schluß ziehen, daß die Zahlenpaare ein geordnetes System bilden, d. h., daß zwei Zahlenpaare stets in einer der drei Beziehungen „größer“, „gleich“, „kleiner“ zueinander stehen. Das ergibt sich unmittelbar, sobald wir bedenken, daß der Ausdruck $ad - bc$ eine ganze Zahl ist, daher gewiß entweder positiv, Null oder negativ sein muß; und von da überträgt sich diese Disjunktion auf die Zahlenpaare.

3. Addition.

Als Summe der beiden Zahlenpaare (a, b) und (c, d) erklären wir das Zahlenpaar $(ad + bc, bd)$. Bevor wir diese Definition annehmen, müssen wir nachsehen, ob sie den formalen Anforderungen genügt, die wir an den Summenbegriff stellen müssen¹⁾. Die Summe soll

a) existieren; darin liegt zweierlei: sie soll die Form eines Zahlenpaares haben und Vorder- und Hinterglied sollen ganze Zahlen sein. Nicht jede Definition würde diesen Anforderungen genügen; wollte ich etwa definieren

$$(a, b) + (c, d) = (a, b, c, d),$$

so würde die Summe nicht mehr dem Bereich der Zahlenpaare angehören. Ferner sind Definitionen denkbar, bei welchen das Vorder- oder das Hinterglied gebrochene Zahlen werden. Unsere Definition vermeidet beide Klippen.

b) Die Summe soll eindeutig durch die Summanden bestimmt sein; der Grund, warum wir dieser Forderung einiges Gewicht beizumessen haben, ist der, daß ein Zahlenpaar unendlich vieler verschiedener Darstellungen fähig ist und wir nicht von vornherein darauf bauen dürfen, daß die Summe von der Form der Zahlenpaare unabhängig ist. Mit anderen Worten: Bildet man die Summe

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

und ersetzt man hierin (a, b) und (c, d) durch die ihnen gleichen Zahlenpaare (a', b') und (c', d') , so soll auch

$$(a, b) + (c, d) = (a', b') + (c', d')$$

sein. Man rechnet leicht nach, daß diese Forderung erfüllt ist.

c) Die Addition ist ferner kommutativ und assoziativ und schließlich gilt

d) das Monotoniegesetz, das besagt, daß $A > B$ stets $A + C > B + C$ nach sich zieht.

Aus der Definition der Summe folgt insbesondere, daß

$$(a, b) + (a, b) = (2a, b),$$

¹⁾ Der mehr philosophisch interessierte Leser kann die weitere Entwicklung bis S. 48 überschlagen.

ein Ergebnis, das wir auch kürzer schreiben können in der Form

$$2(a, b) = (2a, b);$$

so fortschließend erkennt man, daß allgemein

$$n(a, b) = (na, b)$$

ist und sieht daraus, wie ein Zahlenpaar mit einer ganzen Zahl vervielfacht wird.

4. Multiplikation.

Wir definieren:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

An diese Definition sind ganz analoge Forderungen zu stellen wie an die Erklärung der Summe; wir übergehen den Nachweis, daß die Forderungen (a) bis (d) erfüllt sind und bemerken nur, daß sich die Forderung (d), das Monotoniegesetz der Multiplikation nicht mehr aufrechterhalten läßt.

Addition und Multiplikation genügen ferner dem distributiven Gesetz

$$A(B + C) = AB + AC.$$

5. Wie steht es nun mit der Subtraktion und der Division? Müssen diese von neuem definiert werden? Das ist nicht nötig; sie sind bereits vollkommen bestimmt, wenn man sie als die inversen Operationen der Addition und Multiplikation auffaßt. Setzt man nämlich

$$(a, b) - (c, d) = (x, y),$$

so soll im Sinn dieser Erklärung

$$(a, b) = (c, d) + (x, y)$$

sein; nach Definition (3) bedeutet das aber

$$(a, b) = (cy + dx, dy)$$

und diese Gleichung kann nach (1) nur bestehen, wenn

$$ady - b(cy + dx) = 0$$

ist, d. h. wenn

$$(ad - bc)y - bdx = 0$$

ist. Eine Lösung dieser Gleichung wird jedenfalls durch

$$x = ad - bc$$

$$y = bd$$

dargestellt, und jede andere ergibt sich, wenn wir diese Lösung mit irgend-einer ganzen Zahl multiplizieren; da aber das Zahlenpaar (nx, ny) auf Grund der Bemerkung von S. 45 dasselbe bedeutet, wie das Zahlenpaar (x, y) , so können wir das Resultat einer Subtraktion immer darstellen in der Form

$$(a, b) - (c, d) = (ad - bc, bd).$$

In ganz ähnlicher Weise kann man bei der Division verfahren. Setzt man

$$(a, b) : (c, d) = (x, y),$$

so bedeutet das, daß

$$(a, b) = (c, d) \cdot (x, y)$$

ist, und daraus ergibt sich, daß

$$(a, b) = (cx, dy)$$

oder

$$ady - bcx = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet (wenn wir wieder von den ganzzahligen Vielfachen absehen)

$$x = ad, y = bc.$$

Wir erhalten somit

$$(a, b) : (c, d) = (ad, bc).$$

Nennt man (d, c) den reziproken Wert von (c, d) , so läßt sich das Ergebnis aussprechen in der Form: ein Zahlenpaar wird durch ein anderes dividiert, indem man es mit dem reziproken Wert desselben multipliziert. --

Die von uns konstruierten Gedankendinge sind also geordnet und man kann mit ihnen in ganz ähnlicher Weise rechnen wie mit den natürlichen Zahlen. Diese beiden Tatsachen veranlassen uns, die neuen Gebilde ebenfalls als Zahlen, und zwar als „rationale Zahlen“ zu bezeichnen. Im System der rationalen Zahlen haben wir uns ein Instrument geschaffen, mit welchem sich die vier Grundspezies der Arithmetik unbeschränkt ausführen lassen, mit Ausnahme der Division durch die Null.

Auch die Widerspruchsfreiheit des neuen Systems wird man auf diesem Standpunkt darin begründet sehen, daß die Definition für die Begriffe „größer“, „gleich“, „kleiner“ sowie die Rechenregeln genau den Sätzen im Quotientenkalkül nachgebildet sind, so daß jeder Widerspruch im System der rationalen Zahlen zugleich im System der ganzen Zahlen offenbar werden müßte.

Unter den ganzen Zahlen spielen die Individuen 0 und 1 eine besondere Rolle: für jede Zahl a gilt

$$a + 0 = a \quad a \cdot 1 = a.$$

Die Zahl 0 ändert also nichts, wenn man sie als Summanden zu einer anderen Zahl hinzufügt; und die Zahl 1 ändert nichts, wenn sie als Faktor zugesetzt wird. Man sagt: 0 ist der Modul der Addition, 1 der Modul der Multiplikation.

Unter den Zahlenpaaren spielen nun die Paare $(0, 1)$ und $(1, 1)$ eine ganz analoge Rolle; d. h. es ist

$$(a, b) + (0, 1) = (a, b)$$

$$(a, b) \cdot (1, 1) = (a, b)$$

Wir werden diese Zahlenpaare deshalb die „rationale Zahl 0“ und die „rationale Zahl 1“ nennen. Was wir für die Zahlen 0 und 1 dargetan hatten, gilt aber ganz allgemein: jeder (positiven und negativen) ganzen Zahl a entspricht eine rationale Zahl $(a, 1)$. So ist z. B.

$$(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 1)$$

$$(a, 1) \cdot (b, 1) = (a \cdot b, 1).$$

Das System der ganzen Zahlen läßt sich mithin auf einen Teil der rationalen Zahlen so abbilden, daß dabei sowohl die Ordnung der Zahlen wie die Verknüpfungen durch die vier Rechenoperationen erhalten bleiben. Deutlicher gesagt: die rationalen Zahlen enthalten ein Teilsystem, das dem der ganzen Zahlen ein-eindeutig, ähnlich und isomorph entspricht. Man meinte daher, daß die rationalen Zahlen eine Erweiterung der ganzen Zahlen seien, daß sie außer diesen auch die Brüche umfassen. Das war ein Irrtum. Tatsächlich bildet jedes der drei Systeme: die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen eine abgeschlossene Welt für sich, und es ist ganz unmöglich, von einem dieser Bereiche durch Hinzufügen neuer Elemente zu einem anderen zu gelangen.

Wir müssen also genau unterscheiden zwischen der natürlichen Zahl 5, der ganzen Zahl $+5$ und der rationalen Zahl $\frac{5}{1}$; diese drei Zahlen sind nicht identisch, insofern sie Gegenstand verschiedener Kalküle sind. Sie entsprechen einander nur, d. h. sie spielen in ihren Kalkülen eine analoge Rolle.

Diese Überlegung regt uns zu folgender Frage an: Halten eigentlich die Rechenoperationen in jedem dieser Kalküle dieselbe Bedeutung? Ist etwa die Subtraktion im Bereich der ganzen Zahlen dieselbe Operation wie im Bereich der natürlichen Zahlen? Aber was heißt hier „dieselbe“? Doch wohl, daß für die Operation dieselben Festsetzungen gelten; so verstanden, ist die Frage zu verneinen. Denn während der Ausdruck $a - b$ im Bereich der natürlichen Zahlen nur unter der Bedingung statthaft ist, daß $a > b$, fällt im Bereich der ganzen Zahlen diese Beschränkung fort, und das ist ein wichtiger Unterschied. Man sieht hieraus, daß man streng genommen nicht von einer Subtraktion sprechen darf, sondern von so viel verschiedenen Operationen dieses Namens, als es Zahlbereiche gibt. Man darf sich über diesen Umstand nicht dadurch täuschen lassen, daß man auf den verschiedenen Ebenen dieselben Zeichen $+$, $-$, $:$ usw. verwendet. Wenn man die Bestimmungen dieser Begriffe nebeneinander stellt, wird klar, wie weit die Analogie zwischen ihnen reicht und wo sie aufhört.

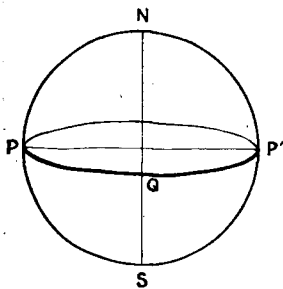
Man könnte diese Betrachtungen noch fortsetzen. Wenn eine Operation auf einem neuen Gebiet nicht alle Forderungen erfüllt, die wir in dem alten an sie zu stellen pflegen, dann fragt es sich, ob wir sie noch dieselbe Operation

nennen sollen. Ein Beispiel dafür ist die Summe von zwei Kugeldrehungen. Jedermann versteht, daß damit das Ergebnis der Hintereinanderausführung zweier Drehungen gemeint ist, und insofern erscheint dieser Sprachgebrauch natürlich. Erfüllt aber dieser Begriff der Summe unsere fünf formalen Forderungen?

a) Die Summe existiert; d. h. zwei Drehungen hintereinander ausgeführt, ergeben allemal wieder eine Drehung;

b) die Summe ist durch die beiden Drehungen eindeutig bestimmt;

c) befolgt die Summe das kommutative Gesetz? D. h. ist das Ergebnis zweier Drehungen unabhängig von der Reihenfolge, in der diese Drehungen vorgenommen werden? Wir wollen sehen! Wir drehen den Globus einmal um



Figur 10.

die Erdachse NS um 90° , so daß P in Q übergeht; ein anderesmal um die horizontale Achse PP', so daß N nach Q fällt. Was ergibt sich, wenn man die beiden Drehungen hintereinander ausführt? Dreht man zuerst um die vertikale, dann um die horizontale Achse, so gelangt N nach Q; nimmt man die Drehungen in umgekehrter Reihenfolge vor, dann geht N in P' über. Beide Lagen der Kugel sind völlig verschieden, die Zusammensetzung zweier Drehungen ist also nicht mehr kommutativ.

d) Dagegen läßt sich beweisen, daß die Zusammensetzung assoziativ ist.

e) Die fünfte Forderung, die Geltung des Monotoniegesetzes fällt weg, weil man nicht definiert hat, wann man eine Kugeldrehung größer resp. kleiner nennt als eine andere.

Von den fünf oben aufgezählten Forderungen sind in unserem Beispiel nur drei erfüllt, und es ist nun in unser Belieben gestellt, ob wir hier noch von einer Summe sprechen wollen.

Auch die Resultierende zweier Kräfte pflegt man ihre Summe zu nennen. Hier gelten die Forderungen a) bis d), e) aber nicht, weil die Kräfte nicht linear geordnet sind.

Man könnte als weitere Beispiele anführen die Addition zweier Wellen oder die Summe zweier Farben (die „Summe“ zweier Farben wäre etwa die aus der Mischung der beiden Farben entstandene Farbe). Man sieht, daß man die Analogie mit dem Summenbegriff auf den verschiedensten Gebieten verfolgen kann; nur wird man dann zu sagen haben, daß sich das Wort „Summe“ jedesmal mit einem neuen Inhalt erfüllt.

Diese Bemerkungen werfen ein Licht auf manche bei Philosophen beliebten Aussprüche wie „das ‚Ganze‘ ist mehr als die Summe seiner Teile“; „Die Melodie ist mehr als die Summe ihrer Töne“ usw. Hiermit ist nichts gesagt, weil es

zunächst unklar ist, was man denn unter der Summe von Tönen verstehen will; dieser Ausdruck ist noch niemals definiert worden. Man kann diesen Worten natürlich einen Sinn geben und dann kann mit jener Äußerung vielleicht etwas Richtiges gemeint sein; nur muß man, damit über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der betreffenden Äußerung überhaupt diskutiert werden kann, vorerst angeben, was man unter einer „Summe von Tönen“ versteht¹⁾.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für den Begriff der Gleichheit anstellen. Wir haben gesagt, daß wir eine Relation nur dann als Gleichheit anerkennen können, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Aber ist das Festhalten an diesen Forderungen wirklich so unerlässlich? Bei einiger Besinnung wird man zu einer anderen Ansicht kommen. Es ist z. B. nicht unbedingt notwendig, daß der Begriff der Gleichheit transitiv ist. Beim Vergleich anschaulich gegebener Strecken im Gesichtsfeld kommt es nicht selten vor, daß man die Strecken a und b gleich lang sieht, ebenso b und c, während einem a und c verschieden lang erscheinen. Analoges kommt beim Vergleich von Farben, Tonhöhen usw. vor. Wir werden dieser Sachlage am besten gerecht, wenn wir sagen: Der Begriff der Gleichheit, angewendet auf solche Erscheinungen, ist zwar symmetrisch, aber nicht unbedingt transitiv.

Diese Betrachtungen lockern das Vorurteil auf, der Begriff der Gleichheit müsse gewisse Eigenschaften haben. Statt dessen werden wir sagen: Wir können Begriffe bilden, die dem Begriff der Gleichheit zwischen natürlichen Zahlen mehr oder weniger verwandt sind, und es wäre nur unzweckmäßig, einen Begriff von ganz anderen Eigenschaften mit demselben Namen zu belegen. Demnach werden wir das auf S. 24 Gesagte verbessern, indem wir das dort geschilderte Vorgehen nicht mehr „berechtigt“, sondern nur „zweckmäßig“ nennen. Genauer gesagt werden sich die Forderungen, die wir an den Begriff der Gleichheit von Zahlenpaaren stellen, in zwei Teile zerlegen:

- a) Zweckmäßigkeit der Gleichheitsdefinition für Zahlenpaare, indem man eine Art Permanenz der Eigenschaften der Gleichheitsrelation fordert.
- b) „Berechtigung“ in dem Sinn, daß für diejenigen Paare, welche hinterher den Einzelzahlen entsprechen sollen, dieselbe Relation bestehen soll, wie für Einzelzahlen.

Zum Abschluß wollen wir noch einigen Bemerkungen Raum geben.

1. Fragt jemand, was eine rationale Zahl sei, so kann man ihm nicht besser antworten, als indem man ihm den Kalkül mit diesen Zahlen beschreibt, ihm also die Regeln nennt, nach denen mit solchen Zahlen gerechnet wird. Man stellt sich manchmal vor, daß die rationalen Zahlen schon irgendwie

1) Vgl. dazu Schlick, Über den Begriff der Ganzheit, Erkenntnis, Bd. 5.

„da sind“, unabhängig vom Kalkül und daß die Rechengesetze aus der Natur oder aus dem Wesen dieser Zahlen folgen. Aber so ist es nicht, und unsere Überlegungen zeigen, daß der Begriff der rationalen Zahl durch den Kalkül der rationalen Zahlen bestimmt ist.

Die Erfahrung, daß wir Strecken, Gewichte usw. zu teilen vermögen, begründet das Rechnen mit rationalen Zahlen nicht, d. h. sie kann die Gesetze des Rechnens nicht als Wahrheiten erweisen; wohl aber konnten solche Erfahrungen den Mathematiker dazu anregen, einen Kalkül zu schaffen, der sich auf dieses Substrat anwenden läßt. Wir werden auf diesen Punkt noch öfter zurückkommen.

2. Wie kommen wir aber gerade auf Zahlenpaare und nicht z. B. auf Zahlentripel? Die Antwort ist: Weil unser Kalkül dem Rechnen mit Quotienten nachgebildet ist und ein Quotient durch Angabe von zwei Zahlen völlig bestimmt ist. (Und dasselbe trifft für die ganzen Zahlen zu, deren Kalkül dem Rechnen mit Differenzen nachgebildet ist.) Daß die inversen Operationen immer an zwei Zahlen ansetzen, das ist der tiefere Grund dafür, daß wir gerade Zahlenpaare benötigen.

Ein Zahlenpaar ist an sich nichts, ein leerer Rahmen, den man mit dem verschiedensten Inhalt erfüllen kann: Dasselbe Zahlenpaar wird, je nach den Regeln, die man festsetzt, eine ganze Zahl oder eine rationale Zahl oder eine komplexe Zahl darstellen können; wollte man von der Bedeutung eines Zahlenpaares reden, so würde man am besten tun, zu sagen: Die Bedeutung ist die Art der Verwendung.

3. Bei dem Aufbau, den wir bisher geschildert haben, wurden zuerst die ganzen und dann erst die rationalen Zahlen konstruiert. Liegt eine innere Notwendigkeit für diese Reihenfolge vor? Hätte man nicht zuerst die vorzeichenlosen rationalen Zahlen und dann erst den Unterschied von positiv und negativ einführen können? Gewiß. Dabei würden wir aber nicht etwa auf ein anderes rationales Zahlensystem kommen, sondern das so konstruierte System würde sich mit dem vorher betrachteten als isomorph erweisen, indem jeder Beziehung des einen Systems eine gleichgebaute des anderen entspricht und umgekehrt.

6. Die Grundlagen des Rechnens mit natürlichen Zahlen.

Die Basis unserer ganzen Entwicklung ist das System der natürlichen Zahlen. Wir haben dasselbe bisher als bekannt oder gegeben hingenommen, müssen aber jetzt zu einer tieferen Ansicht vordringen, indem wir dem Ursprung der Rechengesetze selbst nachgehen. Damit betreten wir ein Gebiet, über das die Meinungen heute noch nicht geklärt sind. Wir werden hier zunächst über den gegenwärtigen Stand dieser Forschungen berichten und dann einigen Gedanken Raum geben, die vielleicht auf den einen oder anderen Punkt ein helleres Licht werfen. Das Rechnen mit natürlichen Zahlen läßt sich auf einige wenige Gesetze gründen, die wir zunächst übersichtlich zusammenstellen wollen:

I. Gesetze für die Addition.

1. $a + b$ ist stets wieder eine Zahl, d. h. die Addition ist unbeschränkt ausführbar.
2. $a + b$ ist eindeutig bestimmt; d. h. es gibt nur eine Zahl, die Summe von a und b ist.
3. $a + b = b + a$ (kommutatives Gesetz).
4. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (assoziatives Gesetz).
5. Aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$ (Gesetz der Monotonie).

II. Gesetze für die Multiplikation.

6. $a \cdot b$ ist stets wieder eine Zahl.
7. $a \cdot b$ ist eindeutig bestimmt.
8. $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutatives Gesetz).
9. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (assoziatives Gesetz).
10. Aus $a > b$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$ (Gesetz der Monotonie).

III. Gesetze für die Verbindung von Addition und Multiplikation.

11. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (1. distributives Gesetz).
12. $(a + b) \cdot c = ac + bc$ (2. distributives Gesetz).

(Wie die Rechengesetze für die inversen Operationen lauten, werden wir später besprechen.)

Sehen wir zunächst nach, wie diese Gesetze beim elementaren Rechnen zur Geltung kommen! Wenn man etwa die Multiplikation von 7 und 24 ausführen soll, so zerlegt man 24 in 20 und 4 und rechnet

$$7 \cdot 24 = 7 \cdot (20 + 4) = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 4;$$

dabei ist das distributive Gesetz benutzt; das assoziative Gesetz der Multiplikation wird angewendet, wenn man weiter rechnet

$$7 \cdot 20 = 7 \cdot (2 \cdot 10) = (7 \cdot 2) \cdot 10 = 14 \cdot 10 = 140;$$

nun bleibt noch 28 zu addieren; zerlegt man 28 in 20 + 8, so ergibt sich mit Hilfe des assoziativen Gesetzes der Addition

$$140 + 28 = 140 + (20 + 8) = (140 + 20) + 8 = 168.$$

Wir erkennen so in den einzelnen Schritten des Ziffernrechnens genau unsere allgemeinen Gesetze wieder. Wo kommen die Monotoniegesetze zur Geltung? Bei dem gewöhnlichen Rechnen nicht, wohl aber bei der abgekürzten Multiplikation, wo es sich darum handelt, das Resultat zwischen zwei bestimmten Grenzen einzuschließen. Zusammenfassend kann man sagen, daß das praktische Rechnen mit Zahlen in der fortwährenden Anwendung jener zwölf Grundgesetze besteht, wobei die Resultate für die Einer einem gedächtnismäßig eingelernten Vorrat von Beziehungen (dem Einsundeins und Einmal-eins) entnommen werden.

Natürlich hat man lange gerechnet, ohne diese Gesetze explizit zu kennen; sie mußten erst aus den Rechenprozessen herausgeschält und als ihre logische Grundlage erkannt werden. Das geschah im ersten Drittel des vorigen Jahrhunderts, hauptsächlich durch englische und französische Mathematiker (wie Servois und Hamilton); in Deutschland dringen diese Ideen erst 1867 durch Hankel ein und dann später durch Stolz.

Die Frage, mit der wir uns sogleich mitten in die heutige Diskussion begeben, ist nun die: Wie rechtfertigt man diese zwölf Gesetze? Kann man sie beweisen oder müssen sie als unbeweisbare Grundwahrheiten hingenommen werden? Hier gehen die Meinungen auseinander. Wir können da zwischen vier Auffassungen unterscheiden:

I. Die Grundgesetze sind Wahrheiten, die jedem denkenden Geist einleuchten müssen: Von dem anschaulichen Sinn der Addition als einer Zusammenfügung zweier Mengen liest man einfach ab, daß es nur eine Zahl geben kann, welche die Summe ist und daß dieses Ergebnis unabhängig ist von der Reihenfolge, in der man die beiden Mengen zusammenfügt. Als Quell aller mathematischen Erkenntnis gilt hier die Anschauung, wobei man weniger an die sinnliche Anschauung der empirischen Dinge als an die innere Anschauung der Zahlenreihe denkt. Als Vertreter dieser Auffassung

ist unter den Philosophen Kant, unter den Mathematikern Hamilton zu nennen.

II. Man kann versuchen, die Zahl der Grundgesetze zu reduzieren, indem man sie aus wenigen, tiefer liegenden Sätzen herleitet. Diese Auffassung stellt eine Modifikation des ersten Standpunktes dar: Nur die Ur-gesetze, welche die Untersuchung bloßlegt, sollen der Anschauung entnommen werden, während alles weitere Sache der Logik ist. Angebahnt wurde diese Richtung von H. Grassmann. Er hat in seinem „Lehrbuch der Arithmetik“ 1861 gezeigt, wie sich das kommutative Gesetz aus dem assoziativen mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion ableiten läßt. Den Abschluß dieser Entwicklung bezeichnet Peano. Nach ihm läßt sich das gesamte Gebäude der Arithmetik auf fünf Grundsätzen errichten. Wird die Wahrheit dieser Sätze zugestanden, so ergibt sich alles Weitere durch rein logisches Schließen, ohne daß es notwendig wäre, an die inhaltliche Bedeutung der Rechenoperationen zu denken. Diese Untersuchungen sind außerordentlich mühsam. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die zahllosen Ideenassoziationen fernzuhalten, die der Gebrauch der geläufigen Sprache mit sich bringt und die unbemerkt in die Überlegung hineinzufließen drohen, wodurch den Schlüssen, die ja bloß aus den explizit angegebenen Prämissen gezogen werden sollen, ihre Strenge geraubt würde. Peano hat zur Erleichterung der Kontrolle eine Begriffsschrift erdacht, welche das logische Schließen formalisiert, so daß man sicher ist, keine unbemerkten Voraussetzungen in die Schlußketten aufzunehmen. So sind die Anfänge der modernen Logik aus den Forderungen der mathematischen Beweistechnik hervorgewachsen. Die erwähnten Grundsätze lauten nun:

1. Null ist eine Zahl.
2. Der Nachfolger irgend einer Zahl ist eine Zahl.
3. Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger.
4. Null ist nicht der Nachfolger irgend einer Zahl.
5. Jede Eigenschaft der Null, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu.

Wir werden später auf den genauen Sinn dieser Sätze zurückkommen und bemerken hier nur folgendes: Die Frage nach dem letzten Ankergrund der mathematischen Erkenntnis war durch diese Forschungen nicht gelöst, sondern nur weiter zurückgeschoben. Es setzten daher Bemühungen ein, die Grundsätze Peanos aus noch tiefer liegenden Wahrheiten herzuleiten. Eine Begründung derselben mit Hilfe der Arithmetik kommt nicht in Frage; wir haben ja in den Peanoschen Axiomen schon die letzten Ausgangspunkte der arithmetischen Deduktion erreicht. Wohl aber scheint sich eine solche Möglichkeit aufzutun, sobald man über die Grenzen der Arithmetik hinausblickt. Dies führt uns auf den dritten Standpunkt:

III. auf welchem man versucht, die Arithmetik auf die Logik zu gründen, wobei man von sehr allgemeinen Begriffsbildungen der Mengenlehre resp. des Klassenkalküls Gebrauch macht. Der Begründer dieser Denkweise war Frege; bezeichnet Peano den Endpunkt der Arithmetisierung, so beginnt mit Frege die Logisierung der Mathematik. Die Behauptung, daß die Mathematik nur ein Zweig der Logik sei, schließt zwei verschiedene Thesen in sich, die nicht immer deutlich auseinandergehalten werden:

a) Die Grundbegriffe der Arithmetik lassen sich durch Definition zurückführen auf rein logische Begriffe.

b) Die Grundsätze der Arithmetik lassen sich durch Beweis herleiten aus rein logischen Sätzen.

Wenn Freges Behauptung zu Recht besteht, so würde das bedeuten, daß die gesamte reine Mathematik — soweit sie sich auf dem Fundament der natürlichen Zahlen erhebt — denselben Charakter hat wie die Logik. Und hier ist vielleicht eine Anmerkung über die Natur der logischen Sätze am Platz. Die von den Philosophen oft erörterte Frage, worauf denn die Geltung der Logik beruhe, ob auf der inneren Wahrheit ihrer Sätze, die sich jedem denkenden Geist aufzwingen oder auf der empirischen Beschaffenheit unseres Bewußtseins usw., ist heute dahin entschieden, daß die Sätze der Logik Tautologien sind.

Was eine Tautologie ist, können wir uns ungefähr an folgendem Beispiel klar machen: Stellen wir uns vor, daß jemand nicht recht weiß, welchen Wochentag wir gerade schreiben. Er sagt vielleicht auf unsere Frage: Heute ist Montag oder Dienstag. Das wäre keine sehr bestimmte Antwort. Noch unbestimmter wird sie, wenn er zwischen drei Tagen schwankt. Die Antworten lassen sich nun nach der Unbestimmtheit in eine Skala ordnen — heute ist Montag, heute ist Montag oder Dienstag, heute ist Montag oder Dienstag oder Mittwoch usw. — von welchen jede folgende weniger Aussagegehalt hat als die vorhergehende. Sagt einer nun: „Heute ist Montag oder Dienstag . . . oder Sonntag“, so ist das die unbestimmteste Aussage dieser Art; sie läßt der Wirklichkeit den größten denkbaren Spielraum. Aber dieser Satz hat eine sehr merkwürdige Eigenschaft, die ihn von allen vorangegangenen grundlegend unterscheidet: er kann nicht falsch sein. Welchen Wochentag immer wir haben, es wird entweder Montag oder Dienstag usw. sein. Ein solcher Satz ist auf Grund seiner bloßen Form wahr und sagt nichts über die Wirklichkeit aus. Ein Gebilde dieser Art nennt man eine Tautologie. Ein anderes Beispiel wäre der Satz: „Ich gehe heute entweder aus oder ich gehe nicht aus“; denn was immer ich tue, die Wahrheit des Gesagten ist unumstößlich. (Man merkt leicht, daß dieses Beispiel die Form des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hat, der auch eine Tautologie ist; und dasselbe gilt von allen übrigen

Sätzen der Logik.) Tautologien sind also Sätze, die auf Grund ihrer bloßen Form wahr sind, deren Wahrheit aber um den Preis völliger Inhaltslosigkeit erkauft ist.

Wenn Freges Meinung zutrifft, dann würde das bedeuten, daß die Mathematik ein ungeheures System von Tautologien darstellt, also vollkommen nichtssagend ist. Daß dies die Konsequenz seiner Theorie ist, war Frege seltsamerweise entgangen, denn ihm fehlte noch ganz die Einsicht in das Wesen des Logischen. Seiner Meinung nach sollte die Logik eine beschreibende Wissenschaft sein, etwa wie die Mechanik, und auf die Frage, was sie denn beschreibe, meinte er: Beziehungen zwischen idealen Gegenständen wie „und“, „oder“, „wenn“ usw. Nach dieser Vorstellung gibt es ein Reich logischer Gebilde, unerschaffen vom Menscheng Geist, im Zeitlosen thronend wie die Ideen Platons, zwischen denen mannigfache Beziehungen bestehen, welche die Logik erforscht. Als Frege sein System der Logik aufbaute, da glaubte er jedenfalls zu neuen und immer tieferen Wahrheiten vorzudringen. Die Entdeckung, daß die Sätze der Logik nichts weiter sind als Tautologien, hat diese Meinung berichtigt. Jedenfalls hat sie der Logisierung der Mathematik eine Deutung gegeben, mit der ihr Urheber schwerlich einverstanden gewesen wäre.

Diese Gedankengänge gehören indes schon einer späteren Zeit an¹⁾. Das Unheil brach von einer anderen Seite herein. Als Frege nach zehnjähriger Arbeit den zweiten Band seiner „Grundgesetze“ beendet hatte, erhielt er einen Brief, der die Mitteilung enthielt, daß eine der von ihm verwendeten Schlußweisen auf eine Antinomie führt. Der Schreiber dieses Briefes war Bertrand Russell. Frege mußte gerade in dem Augenblick, als er sein Werk vollendet glaubte, erkennen, daß er auf Sand gebaut hatte oder zumindest, daß die Fundamente erneuert werden müssen. In einem Epilog teilt er dem Leser diese Tatsache mit und hat dann tatsächlich die weitere Arbeit eingestellt.

Mit der Entdeckung der Antinomien tritt die Entwicklung der Logik in eine neue Phase. Die Bemühungen der folgenden Zeit galten der Aufklärung dieses merkwürdigen Phänomens. Man erkannte, daß die Antinomien durch eine zu weite und unvorsichtige Handhabung des Begriffes der Menge entstehen. Wir wollen uns die Sachlage an einem Beispiel vor Augen führen. Eine Menge enthält entweder sich selbst als Element oder sie enthält sich nicht selbst. Die Menge aller Menschen ist kein Mensch, die Menge aller Punkte ist kein Punkt, aber die Menge aller abstrakten Begriffe ist selbst ein abstrakter Begriff. Wir wollen eine Menge normal nennen, wenn sie sich nicht selbst als Element enthält. (Hierher gehören die beiden ersten Beispiele.) Denken

¹⁾ Der Begriff der Tautologie wurde von Wittgenstein eingeführt im Jahr 1921.

wir uns nun alle normalen Mengen zu einer neuen Menge N zusammengefaßt und fragen wir, ob N normal ist, d. h. ob N sich selbst als Element enthält oder nicht! Nehmen wir zunächst an, N enthalte sich als Element; dann kommt die Menge N unter ihren eigenen Elementen vor. Folglich enthält N eine nicht-normale Menge, eben N — während sie doch nach Definition nur normale Mengen enthalten soll. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch war. Folglich, so wird man sagen, kann nur das Gegenteil richtig sein. Aber das Überraschende ist, daß auch diese gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führt. Enthält N sich nicht selbst als Element, so ist N eine normale Menge; da aber N alle normalen Mengen enthalten soll, so muß sie auch die normale Menge N , d. h. sich selbst enthalten — abermals ein Widerspruch. Das Bedenkliche an dem Ganzen ist, daß die Antinomie, wenn wir sie zurückverfolgen, direkt auf den Begriff der Menge zurückgeht, so daß in dieser Begriffsbildung der Ursprung des Widerspruches liegen muß. Russell versuchte daher den Begriff der Menge einzuengen, und zwar durch Aufstellung gewisser Verbote. Danach darf man z. B. nicht mehr unterschiedslos Dinge, Mengen von Dingen, Mengen von Mengen usw. zusammenfassen, sondern muß streng darauf achten, daß die Glieder einer Menge eine gewisse Homogenität haben. Das ist der Grundgedanke der sog. Typentheorie, mit dessen Andeutung wir uns hier begnügen. Diese Theorie hat tatsächlich den bisher bekannten Antinomien den Weg versperrt. Aber eine vollständige Garantie gab sie nicht. Denn wer bürgt dafür, daß nicht eines Tages neue Antinomien auftauchen werden? Um mit Poincaré zu sprechen: Haben wir mit der Hürde, die wir um die Schafe der Mengenlehre gezogen haben, nicht vielleicht unbemerkt auch den Wolf eingeschlossen?

IV. Die Zurückführung der Mathematik auf die Logik verlor daher in den Augen der Mathematiker viel von ihrem Wert. Eher schien es nötig, die Widerspruchslosigkeit der neuen Logik durch mathematische Untersuchungen sicherzustellen. Da aber in der Mathematik selbst wieder logische Schlußweisen angewendet werden, so gewann die Vermutung immer mehr Raum, daß das Ziel in einer anderen Richtung gesucht werden müsse, nämlich in einem gemeinsamen Aufbau von Mathematik und Logik. Bedenken wir wohl, was das heißt! Man fragt nicht mehr, wie die Widerspruchsfreiheit einer einzelnen Theorie zu erweisen ist, z. B. der nichteuklidischen Geometrie, sondern das viel gewaltigere Problem eröffnet sich: die Widerspruchslosigkeit von Arithmetik und Logik zugleich zu erweisen.

Die Methode, deren man sich bei dieser Untersuchung bedient, ist die axiomatische. Sie ist zuerst in der Geometrie angewendet worden und von da allmählich in andere Gebiete eingedrungen. Ihr Wesen läßt sich am besten durch folgende Gegenüberstellung charakterisieren:

Nach der älteren Auffassung beschreiben die Axiome Tatsachen, die

man unmittelbar in der Anschauung vortindet. Sie handeln von den „idealen“ Punkten, Geraden, Ebenen und deren Beziehungen, die durch die Worte „liegen“, „kongruent“, „zwischen“, „parallel“ gekennzeichnet werden. Demgemäß beginnt Euklid mit der Definition der Grundbegriffe; so heißt es bei ihm: *σημεῖον, οὐ μέρος οὐδέν*, Punkt ist, was keine Teile hat. Diese Definitionen bildeten schon von altersher einen Stein des Anstoßes, denn ihr Sinn ist außerordentlich dunkel. Ein Schmerz z. B. hat keine Teile; ist nun ein Schmerz ein Punkt? Vor allem aber ist folgendes zu sagen: eine solche Definition, selbst wenn sie verständlich wäre, hätte für Euklids System eigentlich keinen Wert. Kein einziger Beweis hängt von dieser Erklärung ab, sie wird niemals benutzt, sie steht ganz außerhalb des übrigen Satzsystems. Nun hat die Definition den Zweck, Begriffe zu schaffen, die Ansatzpunkte scharfer Deduktionen sind, und dieser Zweck wird hier verfehlt.¹⁾ Dazu tritt ein weiterer Umstand. In der neueren Geometrie kamen die Mathematiker zu der Einsicht, daß sich geometrische Sätze aus einem Gebiet auf ein ganz anderes „übertragen“ lassen. So können z. B. alle Sätze, die von den Geraden unseres dreidimensionalen Raumes gelten, so gedeutet werden, daß sie von den Punkten eines vierdimensionalen Raumes handeln. Die beiden Gedankensysteme sind vollkommen isomorph (gleichgebaut): Hat man einen Satz in der Geometrie der einen Mannigfaltigkeit bewiesen, so kann man ihn sofort, ohne weiteren Beweis, durch mechanische Übertragung als Satz der Geometrie der anderen Mannigfaltigkeit aussprechen²⁾. Das sinnliche Aussehen der Grundgebilde spielt also für die Geltung der Sätze nicht die geringste Rolle. Ein anderes Beispiel einer Übertragung hat der Leser in dem euklidischen Modell für die nichteuklidische Geometrie Bolyais kennen gelernt. Dieser Umstand hat die Mathematiker dazu geführt, das logische Gerippe einer Theorie loszulösen von ihrem anschaulichen oder erfahrungsmäßigen Inhalt. Man verzichtet nun bewußt darauf zu sagen, was ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene ist oder den Sinn der Grundbeziehungen zu erklären, sondern beginnt damit, Axiome aufzustellen, welche in ihrer Gesamtheit jene elementaren Begriffe charakterisieren: Unter Punkt, Gerade, Ebene versteht man irgendwelche Dinge, für welche die aufgestellten Axiome

¹⁾ Erst kürzlich wurde ein geometrisches Axiomensystem angegeben, in welchem der Begriff des Teils streng definiert ist. In diesem System werden Punkte als diejenigen Dinge definiert, die außer sich selbst und dem „leeren Ding“ keine Teile haben, und aus dieser Definition lassen sich eine Menge von Folgerungen herleiten. Gerade dieses Beispiel zeigt besonders klar, an welchen Mängeln Euklids Definition krankt. Das erwähnte Axiomensystem findet sich in Menger, *New Foundations of Projective and Affine Geometry*. *Annals of Mathematics*, 1936.

²⁾ Ein anderes schönes Beispiel für eine solche Übertragung findet der Leser in Schlick, *Allgemeine Erkenntnislehre*, § 7.

zutreffen. Eine solche Theorie muß, nach dem Ausdruck Pieris, als ein hypothetisch-deduktives System verstanden werden: Wenn die Voraussetzungen auf irgendeinem Gebiet zutreffen, d. h. wenn man Gegenstände angeben kann, welche in den durch die Axiome geforderten Beziehungen stehen, dann sind auch alle daraus abgeleiteten Lehrsätze wahr. Jede solche Angabe von Gegenständen führt zu einer bestimmten Deutung oder Realisierung des Axiomensystems.

Selbst die Beschränkung auf räumliche Beziehungen ist unnötig. Ein drastisches Beispiel hierfür hat Hilbert gegeben: „Drosophila ist eine kleine Fliege, aber groß ist unser Interesse für sie; sie ist der Gegenstand der ausgedehntesten, der sorgfältigsten und erfolgreichsten Zuchtungsversuche gewesen. Diese Fliege ist gewöhnlich grau, rotäugig, fleckenlos, rundflügelig, langflügelig. Es kommen aber auch Fliegen mit abweichenden Sondermerkmalen vor: statt grau sind sie gelb, statt rotäugig sind sie weißäugig usw. Gewöhnlich sind diese fünf Sondermerkmale gekoppelt, d. h., wenn eine Fliege gelb ist, dann ist sie auch weißäugig und fleckig, spaltflügelig und klumpflügelig. Und wenn sie klumpflügelig ist, dann ist sie auch gelb und weißäugig usw. Von dieser gewöhnlich statthabenden Koppelung kommen nun aber bei geeigneten Kreuzungen unter den Nachkommen an Zahl geringere Abweichungen vor, und zwar prozentuell in bestimmter, konstanter Weise. Auf die Zahlen, die man dadurch experimentell findet, stimmen die linearen Euklidischen Axiome der Kongruenz und die Axiome über den geometrischen Begriff „zwischen“, und so kommen als Anwendung der linearen Kongruenzaxiome, d. h. der elementaren geometrischen Sätze über das Abtragen von Strecken die Gesetze der Vererbung heraus; so einfach und genau — und zugleich so wunderbar, wie wohl keine noch so kühne Phantasie sie sich eronnen hätte¹⁾.“

Wie man sieht, läuft die axiomatische Denkweise in der Geometrie auf eine vollständige Trennung des Logisch-Formalen von dem Räumlich-Anschaulichen hinaus. Diese Einstellung kann man auf andere Gebiete ausdehnen, z. B. auf die Arithmetik. Das Bild eines solchen formalen Aufbaues sähe so aus: Wir müssen zunächst die Begriffe und Sätze der Arithmetik ordnen, indem wir diejenigen aufsuchen, deren man zum folgerichtigen Aufbau der Theorie bedarf. Die Sätze, die sich dafür eignen, nennen wir Axiome. Was die Axiome bedeuten, brauchen wir nicht zu wissen, sondern unsere Aufgabe beschränkt sich darauf, aus diesen Axiomen andere Sätze abzuleiten. In den Sätzen und Schlußprozessen treten Begriffe auf, die in unserer Sprache durch die Worte „und“, „oder“, „wenn“, „nicht“, „alle“, „es gibt“ u. a. wiedergegeben werden; wir setzen gewöhnlich voraus, daß wir die Bedeutung dieser Wörter

¹⁾ Naturerkennen und Logik, Naturwissenschaften 1930.

genau kennen und sie nach den Gesetzen der Logik zu handhaben wissen. Nun sollte es aber gerade das Ziel des formalen Aufbaues sein, die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und Logik zu erweisen, wir dürfen daher, wenn wir nicht in einen Zirkel fallen wollen, bei der Ableitung der arithmetischen Formeln nicht von dem logischen Schließen Gebrauch machen. Hilbert schlug deshalb folgenden Weg ein: Die Arithmetik besteht aus Sätzen, die mittels der Formelsprache, und aus Überlegungen, die mittels der Wortsprache ausgedrückt sind. (Man denke nur an ein mathematisches Lehrbuch, in dem Formeln und Textstellen miteinander abwechseln.) Diese Auffassung erweitern wir nun, indem wir die Überlegungen in das Gebäude der formalen Arithmetik einbeziehen, die wir demnach ebenfalls in Formeln bringen müssen. Daß das „inhaltliche Schließen“ durch einen Formalismus nachgebildet werden kann, war durch die vorangegangene Entwicklung des Logikkalküls (Peano, Frege, Russell) sichergestellt. Und nun tun wir den letzten Schritt, indem wir die inhaltliche Bedeutung auch der logischen Begriffe fahren lassen: die Zeichen des Logikkalküls sind uns jetzt, genau so wie vordem die Worte „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“, „kongruent“ usw. inhaltslose Symbole, von denen wir nur voraussetzen, daß für sie gewisse Verknüpfungen, die Axiome der Logik bestehen, die wir uns zu den Axiomen der Arithmetik hinzugefügt denken.

Man könnte die so formalisierte Mathematik mit einem Spiel vergleichen: Den Zeichen entsprechen etwa die Schachfiguren, einer Formel eine gewisse Stellung der Steine auf dem Brett, dem System der Axiome die Anfangsstellung der Schachfiguren, den Schlußanweisungen die Zugregeln und einem Beweis eine Reihe von Zügen, die von der Ausgangsstellung zu einer bestimmten Konfiguration der Steine führt. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß die Mathematik „nur ein Spiel ist“ (daß „man sich nichts dabei denkt“), sondern die Meinung ist bloß die, daß man zum Zweck einer ganz bestimmten Untersuchung — des Nachweises der Widerspruchsfreiheit — von der inhaltlichen Bedeutung absehen kann. Jedem Gedanken der sinnerfüllten Mathematik entspricht eine Formelfigur in unserem Beweisspiel und jeder sinnvollen Überlegung eine Aufeinanderfolge solcher Figuren von bestimmter, genau angegebener Beschaffenheit. So können wir uns ein Abbild der Mathematik in der Ebene des Formalen hergestellt denken. Man kann nun dieses Formelsystem selber studieren und fragen, ob es widerspruchsfrei ist. Da unsere Formeln keine Gedanken ausdrücken, so hat unsere Frage noch keinen deutlichen Sinn. Wir müssen die Eigenschaft „widerspruchsfrei“ erst definieren, z. B. durch die Festsetzung: Diese Eigenschaft kommt einem Formelsystem dann zu, wenn niemals $1 \neq 1$ als Endformel einer Beweisfigur auftritt.

Neben die formalisierte Mathematik tritt eine inhaltliche, die Metamathematik, welche die Struktur der formalisierten Mathematik erforscht;

und zwar ist es eben die Einsicht in die Widerspruchslosigkeit, welche das Hauptziel der Metamathematik bildet. Während man auf dem geschilderten Standpunkt überhaupt nicht nach der „Wahrheit“ der Axiome fragen kann, soll die Metamathematik wirkliche inhaltliche Erkenntnisse zutage fördern: „Die Axiome und beweisbaren Sätze“ erklärt Hilbert, „sind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen, aber sie sind nicht selbst die Wahrheiten im absoluten Sinn. Als die absoluten Wahrheiten sind vielmehr die Einsichten anzusehen, die durch meine Beweistheorie hinsichtlich der Beweisbarkeit und der Widerspruchsfreiheit jener Formelsysteme geliefert werden“¹⁾.

Die Überlegungen dieser Metamathematik sollen sich durchaus auf finitem und anschaulichem Boden bewegen. Der Gegenstand dieser Theorie sind ja die Zeichen selbst, die „sich vollkommen in allen Teilen überblicken lassen“ und deren Aufweisung, Unterscheidung, Aufeinanderfolge „mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich für uns da ist, als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt“²⁾. Welcher Art die dabei auftretenden Überlegungen sind, mögen zwei Beispiele dartun:

1. Kommt in einer beweisbaren Formel ein bestimmtes Zeichen mehr als zweimal vor, dann müssen wir, wenn wir den Beweis durchgehen, auf eine Formel treffen, die zum erstenmal diese Eigenschaft besitzt.

2. Wenn in einer endlichen Reihe von Formeln die erste eine bestimmte Eigenschaft hat und diese sich von ihr immer auf die folgende überträgt, so haben alle Formeln diese Eigenschaft. (Induktion im Endlichen.)

Wie man sieht, werden hier gewisse Tatsachen der Anschauung formuliert — einfache Eigenschaften der Anordnung, zu deren Beschreibung eine Art rudimentärer Zahlbegriff genügt — die so unproblematisch und selbstgewiß sind, daß sie jeder Anwendung logischen Schließens vorangehen. Es scheint, daß wir hier auf eine Art Ursystem stoßen, das den ganzen Bau der Logik und Arithmetik trägt; diese Tatsachen muß man eben zugeben oder überhaupt aufhören zu denken und sich zu verständigen. Ähnliche Ziele hatte schon früher König in seinem Buch „Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre“ verfolgt. Über den Erfolg dieser Versuche werden wir später berichten.

1) Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Ann. 88.

2) Neubegründung der Mathematik, Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamburger Universität, 1922.

7. Strenger Aufbau der elementaren Arithmetik.

Nachdem wir so mit einem Blick die verschiedenen Standpunkte umfaßt haben, wenden wir uns der genaueren Erörterung der einzelnen Ansichten zu und fragen zunächst:

Wie sieht ein strenger Aufbau der elementaren Arithmetik aus? In einem solchen System darf natürlich nicht von stillschweigenden Voraussetzungen oder von undefinierten Begriffen — außer den Grundbegriffen — Gebrauch gemacht werden. Wir wollen dem Leser die Grundlinien eines solchen Aufbaues vorführen und schließen uns dabei an die Darstellung von Skolem¹⁾ an. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Grundformeln der Arithmetik (unsere Grundgesetze 1 bis 12) aus bloßen Definitionen herzuleiten mit alleiniger Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion.

Unsere 12 Grundgesetze beschreiben gewisse Eigenschaften der Addition und der Multiplikation. Nun haben wir noch gar nicht definiert, was wir unter Addition und Multiplikation zu verstehen haben, sondern angenommen, daß wir dies von der Schule her wissen. Bei einem strengen Vorgehen ist das nicht erlaubt, und unsere erste Aufgabe besteht daher darin, die vier Grundoperationen klar zu definieren. Jede Definition setzt andere Begriffe voraus, auf die sie den zu erklärenden zurückführt. Wir müssen demnach angeben, von welchen Begriffen wir bei unserer Untersuchung ausgehen wollen. Als undefinierte Grundbegriffe sehen wir folgende an:

1. Den Begriff „natürliche Zahl“;
2. den Begriff „Nachfolger“ oder „die auf die Zahl n folgende Zahl $n + 1$ “;
3. den Begriff der Gleichheit: „ $a = b$ “ soll bedeuten, daß man a durch b ersetzen darf und umgekehrt.

Weiter wird in den Beweisen das Prinzip der vollständigen Induktion benützt. (Worin dies Prinzip besteht, wird bald zur Sprache kommen.)

Was sollen wir nun unter der Summe zweier Zahlen $a + b$ verstehen? Dem Leser wird ungefähr eine Erklärung vorschweben wie die: Das ist die Zahl, die man erhält, wenn man zu a so oft 1 hinzufügt als b anzeigt. Man kann in der Tat die Addition auf die wiederholte Ausführung der Operation $+1$ zurückführen. Was uns da vage vorschwebt, wird in eine präzise Form gebracht durch die

Df. 1
$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

¹⁾ Begründung der elementaren Arithmetik. Skrifter Videnskapsselskapet i Kristiania, 1923.

Wie ist diese Definition zu verstehen? Man kann ihr Wesen am besten hervorheben, wenn man etwa sagt, daß sie eine Anweisung zur Bildung von Definitionen ist: sie ist die allgemeine Regel, nach der die einzelnen Definitionen

$$a + 2 = (a + 1) + 1$$

$$a + 3 = (a + 2) + 1$$

$$a + 4 = (a + 3) + 1$$

usw.

gebildet sind. Weiß ich also nur, was $a + 1$ bedeutet (d. h. was unter dem Nachfolger von a zu verstehen ist), so erfahre ich durch die erste Definition, was $a + 2$ bedeutet; weiß ich, was $a + 2$ bedeutet, so lerne ich aus der zweiten Definition den Sinn von $a + 3$ kennen usw., und die allgemeine Erklärung ist das Schema, nach welchem alle diese einzelnen Definitionen angelegt sind. Eine solche Erklärung heißt eine rekurrierende Definition; sie ist das allgemeine Glied einer Reihe von Regeln.

Vielleicht meint der Leser, daß wir uns in einem Kreis bewegen: denn wenn ich in meiner Erklärung das Plus-Zeichen verwende, setze ich da nicht schon den Begriff der Summe voraus? Keineswegs! Wir kennen bisher das Zeichen „+“ nur in der Verbindung $a + 1$ und wollen es nun allgemein erklären; wir geben zu dem Zweck eine Anweisung, nach der die Ausdrücke $a + 2$, $a + 3$, $a + b$, $a + (b + 1)$ zu bilden sind, indem wir sagen:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Hierdurch wird also die Summe von a und $b + 1$ gleich der auf $a + b$ folgenden Zahl gesetzt. Ist die Addition schon definiert für beliebige Werte von a und für eine gewisse Zahl b , so ist sie durch diese Definition für beliebige a und für $b + 1$ erklärt und somit allgemein definiert.

Wir werden im folgenden eine Anzahl von Sätzen beweisen, die der Leser alle kennt und die ihm vielleicht als ganz selbstverständlich erscheinen. Und mancher wird denken, es sei doch eigentlich recht überflüssig, etwas lang und breit zu beweisen, was doch ohnehin kein Mensch bezweifelt. Sollte der Leser diese Ansicht teilen, so geben wir ihm folgendes zu bedenken: Die kommenden Beweise haben nicht die Aufgabe, in uns ein Gefühl der Überzeugung hervorzurufen, sondern die, einen Einblick in die Abhängigkeit der Sätze zu gewinnen. Die Forderung, alles zu beweisen, was sich beweisen läßt, entstammt nicht einer zweifelsüchtigen Gemütsart, sondern ist nur der Ausdruck des Verlangens, klar die Struktur des Satzgefüges zu sehen, zu erkennen, welche Verbindung die einzelnen Wahrheiten der Arithmetik untereinander haben. In diesem Sinne möge der Leser die folgenden Beweise aufnehmen.

Satz 1.

$$\underline{a + (b + c) = (a + b) + c} \quad \text{Assoziatives Gesetz.}$$

Beweis: Nach Df. 1 gilt der Satz für $c = 1$. Nehmen wir an, daß er für ein gewisses c für jeden Wert von a und b gültig ist; dann haben wir zu zeigen, daß er auch für $c + 1$ für jeden Wert von a und b gültig ist, d. h. daß die Formel besteht

$$a + (b + [c + 1]) = (a + b) + (c + 1).$$

Dieser Beweis wird nun so geführt, daß wir den links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdruck so lange umformen, bis er die Gestalt des rechtsstehenden Ausdrucks annimmt; dabei werden wir die einzelnen Umformungsschritte deutlich hervorheben.

Nach Df. 1 ist $b + (c + 1) = (b + c) + 1$; folglich ist

$$(\alpha) \quad a + (b + [c + 1]) = a + ([b + c] + 1);$$

nach Df. 1 ist die rechte Seite weiter gleich

$$(\beta) \quad a + ([b + c] + 1) = (a + [b + c]) + 1;$$

der Annahme nach soll nun $a + (b + c) = (a + b) + c$ sein, woraus folgt

$$(\gamma) \quad (a + [b + c]) + 1 = ([a + b] + c) + 1.$$

Nach Df. 1 ist schließlich

$$(\delta) \quad ([a + b] + c) + 1 = (a + b) + (c + 1).$$

Aus diesen vier Umformungen folgt nun, daß das erste und das letzte Glied der Kette gleich sein muß; wir erhalten daher

$$a + (b + [c + 1]) = (a + b) + (c + 1)$$

und das ist unsere Behauptung. Die Struktur des Beweises ist also, im großen gesehen, die: Zuerst wird gezeigt, daß der Satz für $c = 1$ richtig ist; dann wird bewiesen, daß er, falls er für c gilt, auch für $c + 1$ gelten muß; und daraus wird geschlossen, daß er allgemein gilt. Schlüsse dieser Art werden Schlüsse durch vollständige Induktion genannt. Auf Grund dieses Schlusses ist das assoziative Gesetz eine unmittelbare Folge der Definition der Summe. Wir bemerken dabei, daß das Prinzip der vollständigen Induktion nicht eine Prämisse ist, aus der geschlossen wird, sondern eine Anweisung, nach der man schließt.

Eine Konsequenz des bewiesenen Satzes ist, daß man in einem Ausdruck wie $a + (b + c)$ die Klammern weglassen darf: auf dem assoziativen Gesetz beruht es, daß man den Begriff der Summe von zwei Zahlen auf drei oder beliebig viele Zahlen ausdehnen kann¹⁾.

¹⁾ Der nicht mathematisch interessierte Leser kann den Rest dieses Kapitels überschlagen.

Dem Beweis des kommutativen Gesetzes der Addition schicken wir folgenden

Hilfssatz voraus: $a + 1 = 1 + a$.

Beweis: Der Satz gilt für $a = 1$ (denn $1 + 1 = 1 + 1$). Wir nehmen nun an, der Satz gelte für a und zeigen dann, daß er auch für $a + 1$ gelten muß. Kraft unserer Annahme ist $a + 1 = 1 + a$ und daher

$$(\alpha) \quad (a + 1) + 1 = (1 + a) + 1;$$

nach Df. 1 ist weiter

$$(\beta) \quad (1 + a) + 1 = 1 + (a + 1),$$

aus (α) und (β) ergibt sich aber

$$(a + 1) + 1 = 1 + (a + 1),$$

d. h. der Satz gilt für $a + 1$.

Satz 2. $a + b = b + a$ Kommutatives Gesetz.

Beweis: Dem Hilfssatz zufolge gilt der Satz für $b = 1$; wir nehmen an, er gelte für b , dann ist zu zeigen, daß er auch für $b + 1$ gilt, d. h. daß

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a$$

ist. Wir werden den Beweis wieder in eine Reihe einzelner Schritte zerlegen:

$$(\alpha) \quad a + (b + 1) = (a + b) + 1 \quad (\text{Df. 1})$$

$$(\beta) \quad (a + b) + 1 = (b + a) + 1 \quad (\text{nach Annahme})$$

$$(\gamma) \quad (b + a) + 1 = b + (a + 1) \quad (\text{Df. 1})$$

$$(\delta) \quad b + (a + 1) = b + (1 + a) \quad (\text{Hilfssatz})$$

$$(\epsilon) \quad b + (1 + a) = (b + 1) + a \quad (\text{Satz 1})$$

Aus dieser Kette von fünf Gleichungen folgt

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a.$$

Es sei erwähnt, daß in diesem Aufbau das assoziative Gesetz vorangestellt wird; denn im Beweis des kommutativen Gesetzes wird das assoziative bereits benützt (Umformung ϵ).

Wir wollen nun zusehen, wie wir zu weiteren Begriffen der Arithmetik gelangen können. Wie sollen wir etwa den Begriff „kleiner“ definieren? Wenn der Leser eine Definition vorschlagen sollte, so wird er vielleicht sagen: a ist dann kleiner als b , wenn man zu a etwas hinzufügen muß, um b zu erhalten, d. h. wenn es eine Zahl x gibt, so daß

$$a + x = b$$

ist. Diese Formulierung ist nicht falsch, aber sie ist mit einem eigentümlichen Übelstand behaftet. Sie enthält nämlich einen Appell an eine unendliche —

also undurchführbare — Arbeit, weil das Kriterium des Kleinerseins darin besteht, ob man durch Probieren mit allen möglichen Zahlen eine Zahl x finden kann, so daß $a + x = b$ wird. Wenn es eine andere Definition gibt, die dasselbe leistet und die den Appell an die unendliche Zahlenreihe vermeidet, so werden wir ihr den Vorzug geben. Tatsächlich kann man den Begriff „kleiner“ durch eine rekursive Definition fassen, indem man erklärt:

Df. 2. $a < 1$ ist immer falsch;
 $a < b + 1$, wenn entweder $a < b$ oder $a = b$ ist.

Zuerst wird also erklärt, wann $a < 1$ ist; das soll nämlich nie der Fall sein; dann wird festgesetzt, wann die Relation „kleiner“ zwischen einem beliebigen a und einem gewissen $b + 1$ gelten soll, falls diese Relation schon für b definiert ist. Wie man sieht, kommt in dieser Definition der Existenzbegriff nicht mehr vor.

Wir erklären nun die Relation „größer“ als Umkehrung der Beziehung „kleiner“:

Df. 3. $a > b$ heißt: $b < a$.

Aus diesen Definitionen lassen sich nun verschiedene Sätze ableiten, die wir hier ohne Beweis anführen wollen:

3. Die Beziehung „kleiner“ ist transitiv; d. h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

4. Sie ist irreflexiv; d. h. eine Zahl ist nie kleiner als sie selbst.

5. Die Beziehungen „kleiner“, „gleich“, „größer“ bilden eine vollständige Disjunktion; d. h. von zwei beliebigen Zahlen a und b ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

6. Ist $a < b$, dann ist auch $a + c < b + c$.

7. Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$; für den speziellen Fall $c = 1$ ergibt sich der Satz, daß jede Zahl nur einen Vorgänger hat.

Wie kann man die Multiplikation definieren? Das eben beschriebene Verfahren regt uns dazu an, auch hier eine rekursive Definition zu versuchen: Wir werden zuerst die Multiplikation mit der Zahl 1 erklären und dann die Multiplikation mit $b + 1$ auf die Multiplikation mit b zurückführen. Demnach definieren wir:

Df. 4. $a \cdot 1 = a$
 $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$.

Damit haben wir wieder eine Anweisung zur Bildung von Definitionen gegeben: Aus dem ersten Teil der Erklärung erfahre ich, was $a \cdot 1$ bedeutet, nämlich a . Der zweite Teil sagt mir, daß $a \cdot 2$ soviel wie $a + a$, $a \cdot 3$ soviel

wie $a \cdot 2 + a$ bedeutet usw., kurz, er ist die allgemeine Regel, nach der die einzelnen Definitionen gebildet sind.

Wir sind nun so weit, einige weitere von unseren Grundgesetzen beweisen zu können.

Satz 8.
$$a \cdot (b + c) = ab + ac \quad (\text{Erstes distributives Gesetz.})$$

Beweis: Der Satz gilt für $c = 1$ (nach Df. 4). Wir nehmen an, der Satz gelte für ein gewisses c und für beliebige Werte a und b , dann ist zu zeigen, daß er auch für $c + 1$ gilt, d. h. daß

$$a \cdot (b + [c + 1]) = ab + a \cdot (c + 1).$$

Nun ist

$$(\alpha) \quad a(b + [c + 1]) = a([b + c] + 1) \quad (\text{Df. 1})$$

$$(\beta) \quad a([b + c] + 1) = a(b + c) + a \quad (\text{Df. 4})$$

$$(\gamma) \quad a(b + c) + a = (ab + ac) + a \quad (\text{nach Annahme})$$

$$(\delta) \quad (ab + ac) + a = ab + (ac + a) \quad (\text{Satz 1})$$

$$(\epsilon) \quad ab + (ac + a) = ab + (a[c + 1]) \quad (\text{Df. 4})$$

Aus (α) , (β) , (γ) , (δ) und (ϵ) folgt

$$a(b + [c + 1]) = ab + a(c + 1).$$

Satz 9.
$$a(b \cdot c) = (ab) \cdot c \quad (\text{Assoziatives Gesetz.})$$

Beweis ganz analog.

Satz 10.
$$(a + b)c = ac + bc \quad (\text{Zweites distributives Gesetz.})$$

Beweis ganz analog.

Hilfssatz:
$$1 \cdot a = a \cdot 1$$

Beweis ganz analog.

Satz 11.
$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutatives Gesetz.})$$

Beweis ganz analog.

Weitere Sätze, die sich beweisen lassen, sind:

Satz 12: Aus $a < b$ folgt $ac < bc$ und umgekehrt.

Satz 13:
$$a \leq ab.$$

Bevor wir Subtraktion und Division definieren, müssen wir etwas über den Begriff der Teilbarkeit sagen. Wie soll man ausdrücken, daß eine Zahl a durch eine Zahl b teilbar ist? Der erste Gedanke: a ist durch b teilbar, wenn es eine Zahl x gibt, so daß $a = bx$ ist, enthält wieder eine Berufung auf die unendliche Zahlenreihe. Doch ist es leicht, sich von dem Unendlichen

frei zu machen. Wenn es überhaupt eine Zahl x von der verlangten Eigenschaft gibt, dann muß sie eine der Zahlen $1, 2, \dots, a$ sein. (Satz 13.) Das ermöglicht uns, die Teilbarkeitsrelation wie folgt zu definieren:

$D(a, b)$ heißt: $a = b$ oder $a = 2b$ oder $a = 3b$ oder $\dots, a = ab$.

Man kann also die Aussage „ a ist teilbar durch b “ in eine endliche Disjunktion zerlegen; und daher kann man die Gültigkeit oder Ungültigkeit dieser Aussage in endlich vielen Schritten konstatieren. Die endliche Disjunktion kann selbst wieder durch Rekursion definiert werden. Um dieses Ziel zu erreichen, schlagen wir einen scheinbaren Umweg ein: Wir definieren zuerst eine dreistellige Relation $\Delta(a, b, c)$, die bedeuten soll, daß a gleich ist b , multipliziert mit einer Zahl, die zwischen 1 und c liegt; und mit Hilfe dieses Begriffes Δ wird dann die Teilbarkeit D erklärt. Die genauen Definitionen lauten nun:

Df. 5. $\Delta(a, b, 1)$ heißt $a = b$,

$\Delta(a, b, c + 1)$ heißt: $\Delta(a, b, c)$ oder $a = b(c + 1)$.

Df. 6. $D(a, b) = \Delta(a, b, a)$.

Auf Grund dieser Definition kann man verschiedene Sätze beweisen, z. B.: Ist a teilbar durch b und b teilbar durch c , so ist auch a teilbar durch c ; oder: Wenn sowohl a wie b durch c teilbar sind, ist auch $a + b$ durch c teilbar. Indem wir wegen der Einzelheiten der Beweise auf Skolems Abhandlung verweisen, wenden wir uns gleich der Subtraktion und Division zu.

Die Subtraktion kann in folgender Weise definiert werden:

Df. 7. $c - b = a$ bedeutet: $c = a + b$.

Der Ausdruck $c - b$ wird Differenz genannt. Es läßt sich beweisen, daß dieser Ausdruck nur dann eine natürliche Zahl darstellt, wenn $c > b$ ist und daß er dann nur eine Zahl darstellt. Freilich ist der Beweis etwas umständlich, so daß wir ihn übergehen.

In analoger Weise wie die Subtraktion wird die Division erklärt.

Df. 8. $\frac{c}{b} = a$ bedeutet: $c = a \cdot b$.

Der Ausdruck $\frac{c}{b}$ wird Quotient genannt. Wieder läßt sich beweisen, daß $\frac{c}{b}$ nur dann eine natürliche Zahl darstellt, wenn $D(c, b)$ wahr ist; und ist $D(c, b)$ wahr, dann hat $\frac{c}{b}$ einen Wert. $D(c, b)$ ist deshalb mit der Behauptung der Existenz eines Wertes von $\frac{c}{b}$ (zwischen 1 und c) völlig gleichbedeutend.

Wir schließen mit der Anführung von ein paar Sätzen, die sich aus dem Vorhergehenden ohne weiteres ergeben.

$$(a - b) + b = a \qquad \frac{a}{b} \cdot b = a$$

$$(a - b) + c = (a + c) - b \qquad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$(a - b) - c = a - (b + c) \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c \qquad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{b} \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = ac - bc$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

8. Das Prinzip der vollständigen Induktion.

Bei dem Aufbau der Arithmetik, wie ihn das vorige Kapitel geschildert hat, tritt die überragende Stellung des Prinzips der vollständigen Induktion hervor. Bedient man sich dieses Verfahrens, so kann man alle Grundgesetze aus bloßen Definitionen herleiten. Welche Bewandnis hat es aber mit der vollständigen Induktion selbst? Der Ursprung dieses Prinzips ist heute noch nicht ganz aufgeklärt. Wir wollen das belegen, indem wir die Ansichten des größten Mathematikers und des größten Logikers um die Jahrhundertwende, Poincarés und Freges einander gegenüberstellen.

Nach Poincaré besteht die Leistung des induktiven Verfahrens darin, daß es, sozusagen in einer einzigen Formel zusammengedrängt, eine unendliche Anzahl von Syllogismen enthält. Der Reihe nach formuliert besagen sie: Der Lehrsatz A gilt für die Zahl 1; wenn er für die Zahl 1 gilt, gilt er auch für die Zahl 2; folglich gilt er für 2. Wenn er für die Zahl 2 gilt, gilt er auch für 3; folglich gilt er für 3 usw. In Zeichen

$$\begin{array}{c} A (1) \\ \hline A (1) \rightarrow A (2) \\ \hline A (2) \\ \hline A (2) \rightarrow A (3) \\ \hline A (3) \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

Die einzelnen Schlüsse folgen aufeinander wie die Kaskaden eines Wasserfalls: Das Ergebnis eines jeden Schlusses dient dem nächsten als Prämisse. Poincaré fährt fort:

„Wenn wir, anstatt zu zeigen, daß unser Lehrsatz für alle Zahlen gilt, nur vor Augen führen wollen, daß er für die Zahl 6 gilt, so wird es genügen, die fünf ersten Syllogismen unserer Kaskade aufzustellen; wir würden 9 brauchen, wenn wir den Lehrsatz für die Zahl 10 beweisen wollten, für eine größere Zahl würden wir noch mehr brauchen; aber wie groß auch diese Zahl sei, wir würden sie schließlich immer erreichen, und die analytische Verifikation würde möglich sein.

Und wenn wir auch noch so weit in dieser Weise fortschreiten würden, so könnten wir uns doch niemals bis zu dem allgemeinen Lehrsatz erheben, der für alle Zahlen anwendbar ist und welcher allein der Gegenstand der Wissenschaft ist. Um dahin zu gelangen, bedürfte es einer unendlichen Anzahl

von Syllogismen; es müßte ein Abgrund übersprungen werden, welchen die Geduld des Analysten, der auf die formale Logik als einzige Quelle beschränkt ist, niemals ausfüllen kann.

Man kann sich daher der Schlußfolgerung nicht entziehen, daß das Gesetz des rekurrierenden Verfahrens nicht auf das Prinzip des Widerspruchs zurückführbar ist.“ Das letztere Prinzip „würde uns gestatten, immer so viele logische Schlüsse zu entwickeln, wie wir wollen; nur wenn es sich darum handelt, eine unendliche Anzahl in eine einzige Formel zusammenzufassen, nur vor dem Unendlichen versagt dieses Prinzip, und genau an diesem Punkt wird auch die Erfahrung machtlos. Dieses Gesetz, welches dem analytischen Beweis ebenso unzugänglich ist wie der Erfahrung, gibt den eigentlichen Typus des synthetischen Urteils a priori. Man kann andererseits darin nicht bloß ein Übereinkommen sehen wollen, wie bei einigen Postulaten der Geometrie“¹⁾.

Frege dagegen ist der Meinung, durch seine Untersuchungen „wahrscheinlich gemacht zu haben, daß die arithmetischen Gesetze analytische Urteile und folglich a priori sind. Demnach würde die Arithmetik nur eine weiterausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein.

Kant hat den Wert der analytischen Urteile unterschätzt Die fruchtbareren Begriffsbestimmungen ziehen Grenzlinien, die noch gar nicht gegeben waren: was sich aus ihnen schließen lasse, ist nicht von vorneherein zu übersehen; man holt dabei nicht einfach aus dem Kasten wieder heraus, was man hineingelegt hatte. Diese Folgerungen erweitern unsere Kenntnisse, und man sollte sie daher Kant zufolge für synthetisch halten; dennoch können sie rein logisch bewiesen werden und sind also analytisch. Sie sind in der Tat in den Definitionen enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause. Oft braucht man mehrere Definitionen zum Beweis eines Satzes, der folglich in keiner einzelnen enthalten ist und doch aus allen zusammen rein logisch folgt²⁾.“

Merkwürdig zwiespältig ist die Stellung dieser Forscher zu Kant. Poincaré meint: Bezüglich der Sätze der Geometrie hat Kant unrecht, diese sind analytisch, denn die Axiome sind im Grunde nur Festsetzungen; im Gebiet der Arithmetik hingegen hat Kant richtig gesehen, hier liegen wirklich synthetische Urteile a priori vor. Frege ist der Ansicht, daß die Sätze der Arithmetik analytisch seien; trotzdem habe Kant auf dem Gebiet der Geometrie recht: indem er deren „Wahrheiten synthetisch und a priori nannte, hat er ihr wahres Wesen enthüllt.“

1) Wissenschaft und Hypothese, I. Kap.

2) Die Grundlagen der Arithmetik, V.

Poincaré stimmten namhafte Mathematiker zu, z. B. F. Klein, der den Ursprung des rekursiven Verfahrens „für echt intuitiv“ hielt. Freges Überzeugung teilt wieder Dedekind, der im Vorwort seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ ausführt, der Leser werde „durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppen-Verstandes entsprechende Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschauung von vorneherein einleuchtend und gewiß erscheinen. Ich erblicke dagegen gerade in der Möglichkeit, solche Wahrheiten auf andere, einfachere zurückzuführen, mag die Reihe der Schlüsse noch so lange und scheinbar künstlich sein, einen überzeugenden Beweis dafür, daß ihr Besitz oder der Glaube an sie niemals unmittelbar durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist.“ In dieser Schrift versucht er den strikten Nachweis zu erbringen, daß die „unter dem Namen der vollständigen Induktion bekannte Beweisart wirklich beweiskräftig und daß auch die Definition durch Induktion bestimmt und widerspruchsfrei ist“. Poincaré wurde durch diesen „Beweis“ nicht überzeugt; er meinte: „Man kann leicht von einer Aussage zur anderen übergehen und sich so der Einbildung hingeben, als hätte man die Legitimität des rekurrierenden Verfahrens bewiesen. Aber man wird immer auf ein Hindernis stoßen, man wird immer zu einem unbeweisbaren Axiom gelangen, welches im Grunde nichts weiter ist als der zu beweisende Satz, in eine andere Sprache übersetzt.“

Einer anderen Auffassung begegnen wir bei Russell. „Die Verwendung der mathematischen Induktion bei Beweisen“, so lesen wir bei diesem Autor, „war in der Vergangenheit eine Art Mysterium. Man konnte scheinbar keinen ernsthaften Zweifel an der Gültigkeit dieser Beweismethode hegen. Aber niemand wußte, warum sie gültig war. Manche glaubten, sie sei tatsächlich ein Spezialfall der Induktion im logischen Sinn. Poincaré hielt sie für ein Prinzip von größter Wichtigkeit, durch das man eine unendliche Zahl von Syllogismen in ein einziges Argument zusammenziehen könne. Wir wissen heute, daß all diese Betrachtungen irrtümlich sind. Die mathematische Induktion ist eine Definition und kein Prinzip. Es gibt gewisse Zahlen, für die sie gilt, und andere“ (gemeint sind die unendlichen Kardinalzahlen Cantors), „für die sie nicht gilt. Wir definieren die ‚natürlichen Zahlen‘ als diejenigen, auf die man die mathematische Induktion bei Beweisen anwenden kann . . . Daraus folgt, daß solche Beweise auf die natürlichen Zahlen angewendet werden können. Dies ist nicht irgendeine mysteriöse Intuition oder irgend ein Axiom oder Prinzip. Es folgt vielmehr einfach aus dem Satz selbst. Wenn Vier-

füßler definiert sind als Tiere mit vier Füßen, so folgt daraus, daß Tiere, die vier Füße haben, Vierfüßler sind. Ganz ähnlich liegt der Fall der Zahlen, die der mathematischen Induktion genügen.“¹⁾

Man sieht, die Meinungen gehen auseinander. Wir wollen nun versuchen, uns selbst ein Urteil über diesen Gegenstand zu bilden²⁾. Sehr klar tritt uns das Wesen der vollständigen Induktion entgegen in dem Beispiel

$$\begin{array}{r} 1 : 3 = 0,3\overline{333} \\ 10 \\ \hline 10 \end{array}$$

Was diese Division zeigt, ist die Wiederkehr des Restes; und wir schließen daraus, daß es nun „immer so weiter geht“. Man wird sagen wollen: die Rechnung ergibt, daß alle (unendlich vielen) Stellen des Quotienten Dreien sind. Doch hier müssen wir vorsichtig sein. Ergibt das die Rechnung wirklich? Eigentlich nicht, denn jede Rechnung blickt nach endlich vielen Schritten ab; sie könnte allenfalls ergeben, daß die ersten 10, die ersten 20, die ersten 100 Stellen Dreien sind, aber nie, daß alle Stellen Dreien sind. Andererseits läßt uns schon der erste Schritt der Rechnung sehen, daß der Rest wiederkehrt und daß sich d a h e r die Ziffern des Quotienten periodisch wiederholen. Sollen wir also doch sagen, daß der allgemeine Satz aus der Rechnung folgt?

Um uns hierüber klar zu werden, wollen wir von einer Fiktion Gebrauch machen. Stellen wir uns vor, daß es irgendwo einen Volksstamm gebe, der unser Dezimalsystem besitzt und genau so rechnet wie wir, dem aber unendliche Dezimalbrüche unbekannt geblieben sind. Jene Menschen seien etwa gewohnt, eine Division nach der 5. Stelle abzubrechen, weil ihnen das für ihre praktischen Zwecke genügt. Die Division $1 : 3$ würden sie also nur bis auf fünf Stellen ausführen; die Frage, welche Ziffer d a n n kommt, hätten sie sich noch nie vorgelegt. Nehmen wir nun an, daß eines Tages jemand daraufkäme, daß man die Division beliebig weit fortsetzen kann und daß der so entspringende Dezimalbruch aus endlos vielen Dreien besteht. Worin bestünde seine Entdeckung? Wenn uns das klar geworden ist, können wir hoffen, einen tieferen Blick in das Wesen der Induktion zu tun.

Man wird zunächst sagen: Die Entdeckung besteht darin, daß ihm etwas aufgefallen ist, woran bisher die anderen achtlos vorbeigegangen sind, die Wiederkehr des Restes. Aber das wäre nicht ganz richtig ausgedrückt. Denn hätte man einen, der die periodische Division noch nicht kennt, gefragt:

¹⁾ Einführung in die mathematische Philosophie. Kap. 3.

²⁾ Die hier entwickelten Gedanken, sowie einige andere, die ausdrücklich im Nachwort angeführt sind, verdankt der Verfasser Herrn Ludwig Wittgenstein.

„Ist in dieser Division der erste Rest gleich dem Dividenden?“ so hätte er natürlich „ja“ gesagt; es wäre ihm also aufgefallen. Aber damit hätte ihm nicht die Periodizität auffallen müssen.

Man wird nun vielleicht sagen wollen: Wer die Periodizität entdeckt, der sieht die Division anders als der, der sie nicht kennt: er sieht in sie eine unendliche Möglichkeit hinein. Das klingt nun aber, als ob es auf etwas Psychologisches ankäme, auf die Art des Sehens. In Wirklichkeit ist die Entdeckung der Periodizität die Konstruktion eines neuen Kalküls. Wir müssen uns nur klar machen, daß die Division $1 : 3 = 0\bar{3}$ nicht eine Rechnung von der Art ist wie $1 : 2 = 0\cdot5$; vielmehr entspricht

$$\begin{array}{c} 1 : 2 = 0\cdot5 \\ 0 \end{array} \text{ der Division } \begin{array}{c} 1 : 3 = 0\bar{3} \\ 1 \end{array}$$

d. h. einer finiten Rechnung. Man könnte auch sagen: $0\bar{3}$ ist nicht in dem Sinne Resultat der Division wie $0\cdot5$. Das letzte Zeichen war uns vor der Division $1 : 2$ bekannt; was aber bedeutet $0\bar{3}$ losgelöst von der periodischen Division? Die Behauptung, daß die Division den Quotienten $0\bar{3}$ liefert, heißt dasselbe wie die: die erste Stelle des Quotienten ist 3 und der erste Rest gleich dem Dividenden; und diese Behauptung beschreibt eben die Periodizität der Rechnung. Den Unterschied zwischen dieser und einer gewöhnlichen Division kann man dadurch ausdrücken, daß man die Wiederkehr des Restes irgendwie hervorhebt, also z. B. das eine Mal schreibt

$$1 : 3 = 0\bar{3}, \text{ das andere Mal } \begin{array}{c} 1 : 3 = 0\bar{3} \\ 1 \end{array}$$

„Das ist doch nur eine Äußerlichkeit“ wird der Leser sagen. „Daß man die Striche dazu macht, kann doch den Charakter der Rechnung nicht ändern!“ Aber die Striche weisen auf das Gesetz in der Division hin; damit sind wir tatsächlich zu einer neuen Rechnungsart übergegangen. Wer auf die Periodizität aufmerksam macht, der führt eben damit ein neues Zeichen ein. D. h. die Art, wie er auf die Periodizität aufmerksam macht, gibt das neue Zeichen.

Wenn ich die Division nach einigen Schritten abbreche und sage „es werden nun lauter Dreien folgen“ — überspringe ich jetzt den Abgrund zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen? Muß ich ein mysteriöses Prinzip zu Hilfe nehmen, das unendlich viele Schlüsse in einen Akt zusammenfaßt? Davon ist keine Rede. Die Täuschung, der wir hier erliegen, ist die, daß wir von einer unendlichen Extension zu sprechen scheinen (den unendlich vielen, nicht aufgeschriebenen Ziffern), während wir doch, sobald wir die Periodizität entdeckt haben, ein Gesetz entdeckt haben, das Ziffern liefert. Alles ist eigentlich damit gesagt, daß wir erklären: $0\cdot333\dots$ ist nicht eine Abkürzung für eine Zahl, die man nur mangels Tinte und Papier nicht vollständig hinschreiben kann; sondern es ist ein neues Symbol, das seine

eigenen (und zwar endlichen) Rechenregeln hat. Mit anderen Worten, die Pünktchen vertreten nicht in schattenhafter Weise die nicht hingeschriebenen Ziffern, sondern sie sind selbst ein vollwertiges Zeichen in unserem Kalkül.

Nun beginnt sich die Lage zu klären. Der „Sprung vom Endlichen ins Unendliche“ ist in Wirklichkeit der Übergang zu einem neuen Kalkül, der keine logische Folge des alten ist, in keiner Weise aus ihm abgeleitet werden kann, sich aber in bestimmter Weise an ihn anlehnt. Solange uns nur die gewöhnliche Division bekannt war, konnten wir aus der Division $1 : 3$ nicht ableiten, daß die Ziffer 3 periodisch wiederkehrt. Haben wir die Entdeckung der Periodizität gemacht, so haben wir einen neuen Kalkül entdeckt.

Nach diesen Bemerkungen wird uns das Wesen der Induktion verständlicher sein. Es muß uns auffallen, daß ein Beweis durch Induktion eine ganz andere Struktur besitzt als das, was sonst in der Buchstabenrechnung „Beweis“ heißt. Ein Beweis ist ja, formal betrachtet, eine Folge von Formeln, die von bekannten Formeln ausgeht und mit der zu beweisenden schließt; wobei der Übergang von einer Formel zur nächsten nach fixen Regeln erfolgt. Ist das der Fall, so sagen wir, die letzte Formel der Kette sei bewiesen. Betrachten wir aber den Induktionsbeweis, so ergibt sich uns ein ganz anderes Bild: Der Beweis führt gar nicht zu der zu beweisenden Formel. Als Beispiel wollen wir an den Beweis des assoziativen Gesetzes der Addition erinnern. Wir gingen aus von der Definition

$$(D) \quad a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

und der Annahme, der Satz gelte schon für eine bestimmte Zahl c :

$$(A) \quad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Wir bewiesen dann, daß der Satz auch für die Zahl $c + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} a + (b + [c + 1]) &= a + ([b + c] + 1) && \text{(nach D)} \\ &= a + (b + c) + 1 && \text{(nach D)} \\ &= ([a + b] + c) + 1 && \text{(nach A)} \\ &= (a + b) + (c + 1) && \text{(nach D)}. \end{aligned}$$

In diesem Beweis kommt offenbar der bewiesene Satz gar nicht vor. Man sagt ja auch nicht, daß man das assoziative Gesetz ausgerechnet hat, in dem Sinn, in welchem man etwa andere Gleichungen mit Hilfe der Grundgesetze ausrechnet. Die gewöhnliche Ansicht ist vielmehr die, daß zu dieser Kette von Gleichungen noch ein besonderer Schluß hinzutrete, der sagt: also gilt der Satz für alle Zahlen. Und mit diesem Schluß scheinen wir den Abgrund zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen zu überspringen. Es ist merkwürdig, wie eine schiefe Ausdrucksweise das Problem so verhüllen kann, daß es kaum mehr möglich ist, zu der richtigen Auffassung zurückzufinden.

Zunächst fragt es sich nämlich: Ist die Induktion nur das Anzeichen dafür, daß der Satz für alle Zahlen gilt? Oder heißen die Worte „der Satz gilt für alle Zahlen“ nichts anderes als: „er gilt für 1 und wenn er für c gilt, gilt er auch für $c + 1$ “? Gewöhnlich meint man: Der Satz konstatiert eben, daß für alle Zahlen das und das gilt, und der Beweis durch Induktion ist nur einer der Wege, die uns zur Erkenntnis seiner Wahrheit führen. Man macht also eine Unterscheidung zwischen dem Satz — der für sich allein Sinn hat — und dem Beweis, der uns gleichsam erst den Weg zu ihm bahnt. Aber was soll denn der allgemeine Satz besagen, wenn ich von dem Beweis durch Induktion absehe? Etwa, daß er für die Zahl 1 gilt und für die Zahl 2 usw. ins Unendliche? Aber das erklärt uns nicht den Sinn des Satzes, d. h. es gibt uns keine Antwort auf die Frage: Wie gebraucht man diesen Satz? Was sieht man als Kriterium seiner Wahrheit an? Wir können ja nicht alle Zahlen durchlaufen und unendlich viele Proben anstellen; und zwar nicht etwa darum, weil wir zu wenig Zeit und Papier haben, sondern weil es nichts heißt, weil es logisch unmöglich ist. Tatsächlich ist der Beweis durch Induktion das einzige Kriterium, das wir haben. Dann gibt uns aber erst der Beweis den Sinn des Satzes an. Ganz allgemein: Wenn man wissen will, was ein Satz bedeutet, so kann man immer fragen „Wie weiß ich das?“ Und die Antwort auf diese Frage ist die Festsetzung seines Sinnes¹⁾.

Diese Bemerkung gibt uns den Schlüssel zum Verständnis der Induktion. Es ist ganz natürlich, zu sagen: Der Beweis zeigt, daß der Satz für alle Zahlen gilt; aber dann muß man sich klar darüber sein, daß man erst durch den Beweis den Sinn des Wortes „alle“ bestimmt. Und dieser Sinn ist ein anderer als etwa in dem Beispiel: „Alle Sesseln in diesem Zimmer sind aus Holz.“ Denn wenn ich die letzte Aussage verneine, so bedeutet das: „Es gibt mindestens einen Sessel in diesem Zimmer, der nicht aus Holz ist.“ Wenn ich aber die Behauptung „A gilt für alle natürlichen Zahlen“ verneine, so heißt das nur: Eine der Gleichungen im Beweis von A ist falsch, aber nicht: Es gibt eine Zahl, für die A nicht gilt, (es sei denn, daß man den Sinn dieser Aussage durch dieses Kriterium definieren will). — Dafür spricht auch folgen-

¹⁾ Diese Bemerkung kann man auch auf gewisse Probleme anwenden, über die heute viel diskutiert wird, z. B. auf die Rechtmäßigkeit von Existenzbeweisen. Der Intuitionist läßt nur solche Existenzbeweise gelten, die konstruktiv sind, d. h. in welchen ein Verfahren angegeben wird, den betreffenden Gegenstand in endlich vielen Schritten herzustellen. Alle anderen Existenzbeweise verwirft er als „sinnlos“; während der Formalist auch nichtkonstruktive Beweise zuläßt. Wenn unsere Bemerkung richtig ist, so zeigt sie, wie müßig dieser ganze Streit ist. Denn das Wort „Existenz“ hat von vornherein noch keine klar umrissene Bedeutung und erhält eine solche erst durch den Beweis. Wenn nun der Beweis einmal konstruktiv, das andere Mal nichtkonstruktiv geführt wird, so hat eben die Existenzbehauptung einen verschiedenen Sinn.

des: Wenn ich eine allgemeine Formel verneine, z. B. die Formel $(a + b)^2 = a^2 + a b + b^2$, so meine ich damit: nicht diese Formel gilt, sondern . . . und nun kommt die richtige Formel. Die Verneinung hat also nur den Zweck, eine allgemeine Formel in Gegensatz zu bringen zu einer anderen allgemeinen Formel, aber nicht den, eine Existenzaussage zu bilden. Es ist ganz ähnlich, wie wenn ich etwa sage: nicht grün, sondern gelb, nicht 2, sondern 3, wo die Verneinung einer Angabe nur die Vorbereitung für eine andere ist. Es verhält sich damit ganz anders als in dem Beispiel: Nicht alle alten Menschen bekommen graue Haare, das nur sagen soll, daß es alte Menschen gibt, deren Haar nicht grau wird. Mit anderen Worten: Die allgemeine Formel der Mathematik und die Existenzaussage gehören gar nicht demselben logischen System an. Das hat Brouwer richtig gesehen, wenn er bemerkt, daß die Unrichtigkeit einer allgemeinen Aussage über Zahlen noch nicht die Existenz eines Gegenbeispiels bedeutet.

Nun wird uns die Leistung der Induktion klar: Sie ist nicht ein Schluß, der uns ins Unendliche trägt; der Satz $a + b = b + a$ ist nicht eine Abkürzung für unendlich viele einzelne Gleichungen, die wir nur unserer menschlichen Schwäche wegen nicht alle hinschreiben können — so wenig wie 0.333 . . . eine Abkürzung für einen unendlich langen Dezimalbruch ist — und der induktive Beweis nicht eine Abkürzung für unendlich viele einzelne Syllogismen. Die Induktion so auffassen, heißt, sich den Weg zu ihrem Verständnis verschließen.

Tatsächlich beginnen wir mit der Aufstellung der Formeln

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a + (b + c) &= (a + b) + c \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

einen ganz neuen Kalkül, einen Kalkül, der aus den Rechnungen der elementaren Arithmetik auf keine Weise abgeleitet werden kann; und das ist das Richtige an Poincarés Bemerkung, das Prinzip der Induktion sei nicht logisch zu beweisen. Aber es stellt auch nicht, wie er meinte, ein synthetisches Urteil a priori dar, es ist überhaupt keine Wahrheit, sondern eine Festsetzung, welche besagt: Wenn die Formel $f(x)$ für $x = 1$ gilt und $f(c + 1)$ aus $f(c)$ folgt, so sagen wir, es sei „die Formel $f(x)$ für alle natürlichen Zahlen bewiesen“.

„Aber“, so wird man fragen, „ist das wirklich nur eine Festsetzung? Sehen wir denn nicht, daß der Satz für jede einzelne Zahl, die wir herausgreifen, tatsächlich richtig ist?“ Es könnte paradox erscheinen, daß das assoziative Gesetz der Addition aus einer bloßen Definition (der Formel D) hervorgehen soll. Aber vergessen wir nicht, daß die Formel D nicht eine Definition im Sinne der Schullogik ist, nämlich

eine Ersetzungsregel, sondern eine Anweisung zur Bildung von Definitionen. In ihr liegt also schon die Allgemeinheit, und diese überträgt sich von da auf den induktiven Beweis. Es kann ja auch der Induktionsbeweis als eine Anweisung zur Bildung von Beweisen für einzelne Zahlgleichungen angesehen werden, als das allgemeine Glied einer Reihe von Beweisen. Ja, man könnte den Induktionsbeweis geradezu in Form einer Reihe von Gleichungen mit einzelnen Zahlen hinschreiben, als ein Reihenglied mit einem „usw.“, und er verliert dadurch nicht seine Strenge. Zugleich zeigt diese Schreibweise viel klarer, daß die allgemeine Formel gar nicht aus dem Induktionsbeweis folgt, — in der Formel kommen ja Buchstaben vor, in dem Beweis aber nur Ziffern. Wohl aber kann man eine neue Bestimmung treffen, die den Übergang zu der allgemeinen Formel erlaubt.

Damit klärt sich ein Rätsel auf, das die Forscher so tief beunruhigt hat: Wie kommt es, daß wir das Resultat einer einzelnen Rechnung vorhersagen können, ohne sie auszuführen? Daß wir z. B. prophezeien können, daß 63×289 dasselbe ergeben wird wie 289×63 ? Das Beunruhigende besteht darin, daß wir den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Vorhersage und der besonderen Rechnung nicht sehen. Man war deshalb immer geneigt, in der Formel $a \cdot b = b \cdot a$ eine Zusammenfassung aller einzelnen Rechnungen zu erblicken. Tatsächlich ist das der Sinn jener Formel nicht. Eher könnte man das kommutative Gesetz mit einem Pfeil vergleichen: Es weist, der Reihe der Zahlen entlang, ins Unendliche. Das ist nicht dasselbe, wie wenn man sagt, das Gesetz fasse unendlich viele einzelne Sätze zusammen. Der Unterschied ist ungefähr derselbe wie in den Sätzen: Der Scheinwerfer scheint ins Unendliche und: Er beleuchtet die Unendlichkeit.

Wir könnten demnach sagen: Dadurch, daß wir jene Konvention treffen — nämlich solche Formeln aufzustellen, die den induktiven Beweisen entsprechen —, passen wir den Kalkül mit Buchstaben dem Kalkül mit Zahlen an; d. h. wir bringen diesen Kalkül in Einklang mit dem Kalkül der natürlichen Zahlen, wie wir ihn durch die rekursive Definition der Addition etc. festgelegt haben.

9. Der gegenwärtige Stand der Grundlagenforschung.

A. Der Formalismus.

Wir nehmen nun den Bericht über das weitere Schicksal der Grundlagenforschung wieder auf und wenden uns zunächst dem Formalismus zu. Welche Erwägungen zur Entstehung dieser Denkweise geführt haben, ist bekannt. Vor allem war es das Problem der Widerspruchsfreiheit, das die Mathematiker zu einer strengen Formalisierung der mathematischen Sätze und Schlußweisen gezwungen hat. Ist nun der Nachweis der Widerspruchsfreiheit gelungen?

Bis vor kurzer Zeit sah es so aus, als ob die Ansätze Hilberts zu dem gewünschten Ziel führen sollten; ja für gewisse Teile der Mathematik, z. B. für die elementare Zahlenlehre, schien der Beweis für die Widerspruchsfreiheit bereits erbracht zu sein, und zwar mit finit-anschaulichen Mitteln. D. h. es schien, daß man die Widerspruchsfreiheit der Zahlenlehre einschließlich der Logik beweisen könne durch eine metamathematische Untersuchung, die nur von einem Teil der Voraussetzungen der Zahlenlehre und der Logik Gebrauch macht. Inzwischen aber hat sich die Lage wesentlich verändert: Auf Grund einer Untersuchung von Gödel¹⁾ hat sich nämlich das überraschende Resultat ergeben, daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit eines logisch-mathematischen Systems nie mit den Mitteln dieses Systems erbracht werden kann, sondern daß man hierzu wesentlich neue Mittel heranziehen muß, die in dem System selbst nicht ausdrückbar sind. Genauer formuliert besagt die von Gödel gefundene Einsicht: Fügt man zu den Axiomen Peanos noch die Axiome des Logikkalküls hinzu und nennt das so entstandene System P , dann läßt sich kein Beweis für die Widerspruchsfreiheit von P führen, der in P formuliert werden kann, vorausgesetzt, daß P widerspruchsfrei ist. (Der letztere Zusatz ist wesentlich: Wäre nämlich P widerspruchsvoll, dann könnte aus den Axiomen von P jede beliebige Formel abgeleitet werden, also auch die Formel, die, inhaltlich gedeutet, besagt, daß P widerspruchsfrei ist.)

Man wird zunächst denken, daß diese Tatsache — die Unmöglichkeit, die Widerspruchsfreiheit von P in P zu formulieren — daran liege, daß das betrachtete System irgendwie zu ausdrucksarm ist und daß man daher trachten solle, es zu erweitern, um das Ziel zu erreichen. Allein das würde nichts helfen. Gödel hat nämlich ganz allgemein gezeigt: Welches formale System wir auch

¹⁾ Über formal unentscheidbare Sätze, Monatshefte für Math. u. Phys., 1931.

nehmen, das die Lehre von den natürlichen Zahlen und dem Logikkalkül umfaßt (schärfer: das aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entsteht), stets würde in dem Widerspruchsfreiheitsbeweis eine Überlegung auftreten, die sich in diesem System nicht darstellen läßt.

Dieses wichtige Resultat ist aber nur die Folge eines anderen, noch tiefer liegenden Satzes von Gödel, der sich ungefähr so aussprechen läßt: Jede Arithmetik ist lückenhaft; d. h. in jedem der vorhin genannten formalen Systeme gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze und für jedes dieser Systeme lassen sich arithmetische Begriffe angeben, die in diesem System nicht definierbar sind. (Z. B. läßt sich für jedes formale System S eine reelle Zahl konstruieren, die in S nicht definiert werden kann.) Man darf den Sinn dieser Behauptung nicht dahin verstehen, als sei damit nun bewiesen, daß es definitiv unlösbare mathematische Probleme gäbe; sondern der Begriff „lösbar“ oder „entscheidbar“ bezieht sich immer nur auf ein bestimmtes formales System; ist ein Satz in diesem System unentscheidbar, so bleibt doch stets die Möglichkeit denkbar, ein reicheres System zu konstruieren, in welchem der Satz einer Entscheidung zugeführt werden kann. Aber es gibt kein System, in dem alle arithmetischen Sätze entscheidbar oder in dem alle arithmetischen Begriffe definierbar wären. Wenn Brouwer meint, die Mathematik sei wesentlich ein geistiges Handeln, eine Reihe sinnerfüllter Konstruktions-schritte und daher nicht in ein starres System von Formeln zu fassen, so liegt darin eine Ahnung des richtigen Sachverhalts. „Alles Mathematische ist formalisierbar; aber die Mathematik ist nicht durch ein System erschöpfbar, sondern erfordert eine unendliche Reihe immer reicherer Sprachen.“¹⁾

Diese Unabgeschlossenheit der Mathematik ist nicht etwa eine Folge unserer menschlichen Unvollkommenheit, sondern liegt im Wesen der Sache. Früher hatte man sich vorgestellt, daß die Mathematik ein System ist, dessen sämtliche Sätze sich zwingend aus einigen wenigen Voraussetzungen ergeben und in welchem jedes Problem durch eine endliche Anzahl von Operationen gelöst werden kann. Dieses Bild gibt die Struktur der Mathematik nicht richtig wieder. Tatsächlich ist die Mathematik ein Nebeneinander unzähliger Systeme, die sich logisch gegeneinander abschließen und von denen jedes Probleme enthält, die innerhalb dieses Systems selbst nicht entscheidbar sind. Eines dieser Probleme ist das der Widerspruchsfreiheit; d. h. die Aussage, daß das System S widerspruchsfrei ist, ist in S unentscheidbar.

¹⁾ Carnap: Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik: (Monatshefte f. Math. u. Phys., 1934.)

Mit alledem ist nicht gesagt, daß das von Hilbert gesteckte Ziel unerreichtbar wäre. Jedenfalls wird man den Ausgangspunkt, die Beschränkung auf einen primitiven Teil der Arithmetik und Logik abändern müssen. Ob dann die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik (Arithmetik, Algebra, Analysis, Funktionentheorie) erwiesen werden kann, steht heute dahin. Einen wichtigen Vorstoß in dieser Richtung stellt eine kürzlich erschienene Arbeit von Gentzen dar, in welcher tatsächlich die Widerspruchsfreiheit der gesamten Arithmetik auf Grund eines (den Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht enthaltenden) Teiles der Arithmetik und gewisser transfiniten Methoden bewiesen wird¹⁾.

Aber selbst wenn sich das gewünschte Ziel auf diesem Weg erreichen ließe, so erhebt sich eine zweite Frage, der wir das größte Gewicht beilegen müssen: Kann durch derlei Untersuchungen die Arithmetik überhaupt begründet werden? Daß diese Frage sehr berechtigt ist, wird deutlich, sobald man die Arithmetik mit der Geometrie vergleicht. Das Problem einer „Begründung der Geometrie“ schließt zwei verschiedene Aufgaben in sich: Die eine ist die, eine Gruppe von Sätzen auszuwählen, welche eine logische Basis der betreffenden Geometrie bildet und die Unabhängigkeit, Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit dieser Grundsätze darzutun. Da nun verschiedene Geometrien denkmöglich sind, so entsteht zweitens die Frage, wie diese Systeme auf unsere Erfahrungswelt — die Lagerungen der starren Körper, das Verhalten der Lichtstrahlen, der Trägheitsbahnen usw. — anwendbar sind. Diese zweite Frage stellt eine Aufgabe der Naturwissenschaft dar, die durch mathematisches Denken allein nicht zu lösen ist.

Wenn wir diese Überlegung auf die Arithmetik anwenden, so erkennen wir: Was durch die axiomatische Untersuchung geleistet wird, ist — im günstigsten Falle — die Erledigung des ersten Problems. Es bleibt die Frage, inwieweit das Axiomensystem der Arithmetik auf die „wirklichen Zahlen“ zutrifft, d. i. auf diejenigen Bedeutungen, die wir mit den Zahlworten verbinden. Diese Frage stellt ein neues, sehr tiefliegendes Problem dar, das über dem formalen Aufbau nicht vergessen werden darf.

Betrachten wir, um unsere Gedanken zu präzisieren, die fünf Axiome Peanos. Peano hatte angenommen, daß wir die Bedeutung der Worte „Null“, „Zahl“, „Nachfolger“ bereits kennen und daß die Axiome den Ausspruch einer Wahrheit bilden. Der Formalist teilt diese Ansicht nicht: für ihn sind die Axiome bedeutungslose Verknüpfungen von Zeichen, deren Struktur ihn allein interessiert. Die Symbole „Null“, „Zahl“ und „Nachfolger“

¹⁾ G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Math. Ann.* 112.

lassen sich dann auf unendlich viele Arten deuten, und jede von diesen Deutungen würde der Arithmetik einen anderen Sinn verleihen. Einige instruktive Beispiele gibt Russell:

1. „0“ soll 100 und „Zahl“ soll die Zahlen von 100 aufwärts bedeuten. Dann wird unseren Grundsätzen Genüge geleistet. Selbst der 4. gilt, denn obwohl 100 der Nachfolger von 99 ist, so ist 99 keine „Zahl“ in dem Sinn, den wir jetzt dem Wort „Zahl“ geben. Offensichtlich kann man dieses Beispiel statt mit 100 mit jeder beliebigen Zahl bilden.

2. „0“ soll die übliche Bedeutung haben, aber unter „Zahl“ soll eine „gerade Zahl“ in der üblichen Bezeichnungsweise und unter „Nachfolger“ einer Zahl die Zahl verstanden werden, die aus ihr durch Addition von 2 entsteht. Dann bedeutet „1“ die Zahl zwei, „2“ bedeutet die Zahl vier usw. Die Reihe der Zahlen lautet dann:

$$0, 2, 4, 6, 8, \dots$$

Wieder werden alle fünf Annahmen Peanos erfüllt.

3. Es soll „0“ die Zahl eins bedeuten, „Zahl“ soll die Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

und „Nachfolger“ „die Hälfte von“ bedeuten. Für diese Reihe treffen dann alle fünf Axiome von Peano zu¹⁾.

Man sieht, daß die Axiome gar nicht den Begriff der Zahlenreihe charakterisieren, sondern einen viel allgemeineren Begriff, den der Progression. Jede Progression genügt den fünf Axiomen Peanos. Eine Progression braucht nicht einmal aus Zahlen zu bestehen, sie kann ebensogut eine Reihe von Punkten auf einer Geraden sein oder eine Reihe von Zeitpunkten usw.; da es unendlich viele Progressionen gibt, so kann man das Axiomensystem Peanos auf unendlich viele verschiedene Arten auslegen. Vielleicht meint der Leser, man müsse sich eben damit abfinden; unter den Zahlen sind eben irgendwelche Dinge zu verstehen, welche den Axiomen Peanos genügen und auf die Ergründung ihres Sinnes müssen wir ebenso verzichten, wie wir in der Geometrie auf die Definition der Grundbegriffe verzichtet hatten. Obwohl eine solche Auffassung für manche Zwecke berechtigt ist, kann sie im Allgemeinen nicht befriedigen. Denn der Zahlen bedienen wir uns auch in der Mathematik, um mit ihnen Mitteilungen zu machen. Wenn ich z. B. sage „es gibt nur 5 reguläre Körper“, so will ich damit zweifellos einen wahren Satz aussprechen. Aber es ist unmöglich, mit ihm noch irgendeinen Sinn zu verbinden, wenn „5“ eine bloße Spielmarke ist, die auf die verschiedenste Weise ausgelegt werden kann. Würden wir diesen Standpunkt einnehmen, so hätten wir keine Möglichkeit mehr, die Mitteilung

¹⁾ Einführung in die mathematische Philosophie, Kap. 1.

„es gibt 5 reguläre Körper“ zu unterscheiden von der Mitteilung „es gibt 105 reguläre Körper“. So zeigt die Besinnung auf das einfachste Beispiel, daß wir uns durch die Beschränkung auf diesen Standpunkt gerade das entschöpfen ließen, was den Sinn der Zahlaussagen ausmacht.

Liegt das etwa daran, daß die Axiome Peanos noch zu unbestimmt sind, um die Zahlenreihe festzulegen und ist es vielleicht möglich, diese Unbestimmtheit durch Zusatz weiterer Axiome so einzuengen, daß sich eine vollständige Charakterisierung der Reihe der Kardinalzahlen ergibt? Da ist es nun überaus bedeutsam, daß Skolem jede Hoffnung dieser Art vereitelt hat. Von ihm wurde nämlich ein allgemeiner Satz bewiesen, der besagt, daß es ausgeschlossen ist, mit endlich vielen Axiomen die Zahlenreihe zu charakterisieren¹⁾. Jede Aussage, die in der Arithmetik der natürlichen Zahlen gilt, gilt nämlich auch für Gebilde anderer Art, so daß es unmöglich ist, die Zahlenreihe durch irgendwelche inneren Eigenschaften vor Reihen anderer Art auszuzeichnen.

Ein frappantes und nicht triviales Beispiel dafür, wie eine Umdeutung des Begriffs der ganzen Zahl möglich ist, selbst wenn die Richtigkeit von so vielen Sätzen gefordert wird, daß man versucht sein könnte zu glauben, diese Sätze könnten nur für die ganzen Zahlen gelten, ist folgendes²⁾. Die ganzen Zahlen sind

1. linear geordnet;
2. sie reproduzieren sich durch Addition, Subtraktion und Multiplikation. Dabei ist die Addition kommutativ und assoziativ, ebenso die Multiplikation, und für beide Operationen gilt das distributive Gesetz. Es gibt zwei unmittelbare Nachbarzahlen 0 und 1 derart, daß für jede beliebige Zahl a gilt: $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$;
3. werden die Begriffe der Teilbarkeit, der Einheiten, relativ prim usw. in der bekannten Weise eingeführt, so gilt der Satz: Sind a und b relativ prim, so gibt es zwei Zahlen x und y derart, daß $a x - b y = 1$ ist.

Betrachten wir nun alle Polynome von der Form

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,$$

wobei a_0 eine ganze Zahl ist, während a_1, a_2, \dots, a_n beliebige rationale Zahlen sind. Diese Polynome denken wir uns lexikographisch geordnet (d. h. haben zwei Polynome die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 und b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 , so ist das erste kleiner als das zweite, wenn $a_n < b_n$ ist oder, falls $a_n = b_n$ wäre, $a_{n-1} > b_{n-1}$ ist, usw.). Für den so konstruierten Polynomenbereich sind

¹⁾ „Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems“. Norsk. Math. Forenings Skrifter, Ser. II. 1933.

²⁾ Vgl. Skolem, „Über einige Grundlagenfragen der Mathematik“. Skrifter norske Vid.-Akad., Oslo, I. Mat. Nat. Kl. 1929.

nun alle Eigenschaften erfüllt, die wir in 1 bis 3 angeführt hatten — obwohl sie ursprünglich den Begriff der ganzen Zahl zu charakterisieren schienen. Skolems Satz besagt nun: Eine solche Umdeutung wird stets möglich sein, durch soviel Eigenschaften man auch den Begriff der natürlichen Zahl zu fassen sucht.

B. Die logische Schule.

Dieses Ergebnis zeigt, daß der Formalismus jedenfalls nicht die abschließende Aufklärung über das Wesen der Arithmetik gebracht hat. Und der Grund hierfür ist auch nicht schwer zu entdecken: Diese Denkweise achtet einseitig auf die Struktur der mathematischen Aussagen und versäumt darüber die Untersuchung der mathematischen Begriffe. Die logische Schule hat dagegen ihre Aufmerksamkeit gerade der Analyse der Begriffe zugewandt. Ein sehr bezeichnendes Beispiel dafür ist folgende Äußerung Freges: „Es ist doch eigentlich ein Skandal, daß die Wissenschaft noch über das Wesen der Zahl im Unklaren ist. Daß man noch keine allgemein anerkannte Definition der Zahl hat, möchte noch angehen, wenn man wenigstens in der Sache übereinstimmte. Aber selbst darüber, ob die Zahl eine Gruppe von Dingen oder eine mit Kreide auf einer schwarzen Tafel von Menschenhand verzeichnete Figur sei, ob sie etwas Seelisches, über dessen Entstehung die Psychologie Auskunft geben müsse, oder ob sie ein logisches Gebilde sei, ob sie geschaffen sei und vergehen könne, oder ob sie ewig sei, selbst darüber hat die Wissenschaft noch nichts entschieden. Ob ihre Lehrsätze von jenen aus kohlensaurem Kalke bestehenden Gebilden oder von unsinnlichen Gegenständen handeln, weiß die Arithmetik nicht. Ebenso wenig herrscht Übereinstimmung in ihr über die Bedeutung des Wortes „gleich“ und des Gleichheitszeichens. Die Wissenschaft weiß also nicht, welchen Gedankeninhalt sie mit ihren Lehrsätzen verbindet; sie weiß nicht, womit sie sich beschäftigt; sie ist über ihr eigenes Wesen völlig im Unklaren. Ist das nicht ein Skandal?“¹⁾

Frege hat als einer der ersten das Problem einer Definition der Zahl in Angriff genommen. Er definiert den Begriff der Anzahl in zwei Schritten: erstens erklärt er, wann zwei Mengen gleichzählig sind; auf diesen Begriff gründet er sodann eine Definition des Begriffs „Anzahl“. Zwei Mengen sind nach Frege gleichzählig, wenn jedem Element der einen Menge ein Element der zweiten und jedem Element der zweiten Menge ein Element der ersten entspricht; d. h. wenn es eine eindeutige Relation gibt, welche sie einander zuordnet. Unter der „Zahl einer Menge“ versteht er die Menge aller mit ihr gleichzähligen Mengen. Die Zahl 5 ist danach zu definieren als die Klasse

¹⁾ „Über die Zahlen des Herrn H. Schubert“.

aller Fünferklassen in der Welt; d. i. als die Gesamtheit aller derjenigen Klassen, die sich z. B. auf die Klasse der Finger meiner linken Hand eindeutig beziehen lassen.

Der Leser wird diese Definition vielleicht etwas absonderlich finden; er wird sagen, das habe er sich unter der Zahl 5 nicht gedacht. Aber das wäre noch kein genügender Grund zu ihrer Ablehnung, wenn sie nur sonst die Forderungen erfüllt, die wir an eine gute Definition stellen: daß sie wirklich die allgemein anerkannten Eigenschaften des Begriffs wiedergibt. Aber tut sie das? Mit dieser Frage wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Unsere Bedenken setzen schon ein bei dem ersten Teil der Definition. Zwei Mengen werden gleichzahlig genannt, wenn sie durch eine eineindeutige Relation aufeinander bezogen sind. Wie sollen wir also von zwei Mengen feststellen, daß sie gleichzahlig sind? Offenbar dadurch, daß wir eine solche Relation aufweisen. Wenn ich etwa feststellen soll, ob ich ebensoviel Löffel habe wie Tassen, so müßte ich nach dieser Vorschrift zusehen, ob ich eine eineindeutige Relation finde, in welcher jeder Löffel zu einer Tasse steht; eine solche Relation wäre z. B.: Jeder Löffel liegt auf einer Tasse und keine Tasse bleibt unbelegt. Wie nun aber, wenn die Löffel in einer Lade liegen, die Tassen in einer anderen? Gibt es auch dann eine Relation, welche sie einander zuordnet? Man wird sagen: „Nun, wenn es keine gibt, ist es jedenfalls sehr leicht, eine solche herzustellen; ich brauche ja nur die Löffel über die Tassen zu verteilen.“ Dazu bemerken wir bloß: Dann hat also jedenfalls vorher die Relation nicht bestanden, und wir hätten zu sagen: Solange die Löffel nicht auf den Tassen lagen, waren die beiden Mengen nicht gleichzahlig; und das entspricht nicht dem Sinn, in welchem man das Wort „gleichzahlig“ verwendet.

Man wird entgegnen, so sei die Erklärung nicht gemeint; es komme gar nicht darauf an, ob ich die Löffel tatsächlich auf die Tassen lege, sondern ob ich sie auf die Tassen legen *k a n n*. Sehr wohl! Aber was heißt hier der Ausdruck „ich kann“? Etwa, daß ich die physische Kraft habe, die Löffel über die Tassen zu verteilen? Das wäre ganz uninteressant. Was man sagen will, ist offenbar dies: Ich kann die Löffel über die Tassen deshalb verteilen, weil von beiden Sorten gleichviel Exemplare vorhanden sind. Um die Möglichkeit der Zuordnung zu erkennen, muß ich also schon wissen, daß die Mengen gleichzahlig sind. Nicht die Zuordnung bestimmt die Gleichzahligkeit, sondern die Gleichzahligkeit ermöglicht die Zuordnung.

Man sieht, wie die Täuschung zustande kommt. Die Aussage: „Die beiden Menge_n können einander zugeordnet werden“ wird umgedeutet in die davon ganz verschiedene Aussage: „Die beiden Mengen *s i n d* einander zugeordnet“, d. h. „Es gibt tatsächlich eine Relation, die eine solche

Zuordnung leistet“. Ob eine solche Relation besteht, kann nur die Erfahrung lehren; und daß sie immer besteht, ist durch nichts erwiesen.

Zusammenfassend können wir sagen: Die vorgeschlagene Definition gibt zwar eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Gleichzahligkeit an und faßt daher den Sinn des Ausdrucks „gleichzahlig“ zu eng.

Welcher Sinn kommt dem Wort „gleichzahlig“ zu? Wenn wir in dieser Frage einen klareren Standpunkt gewinnen wollen, so werden wir vorerst eine Unterscheidung zu machen haben. Wir haben zwar bisher von Klassen gesprochen, es aber unterlassen, den Sinn dieses Ausdrucks zu erklären. Den Ausdruck „Klasse“ gebraucht man nun auf zwei Arten: erstens zur Bezeichnung dessen, was in einer Liste aufgezählt ist (Schulklasse); zweitens als gleichbedeutend mit dem Ausdruck „Begriff“ („die Wale gehören zur Klasse der Säugetiere“ heißt: „die Wale fallen unter den Begriff „Säugetier“). Diese beiden Bedeutungen sind völlig verschieden: im ersten Fall ist es tautologisch zu sagen, daß a zur Klasse k gehört (denn das folgt aus der Definition von k); im zweiten Fall ist es eine empirische Erkenntnis.

Fragt man nun, wann zwei Klassen gleichzahlig sind, so wird die Antwort davon abhängen, was man unter einer Klasse versteht. Handelt es sich um zwei Begriffe, so kann man empirisch feststellen, ob sich die Umfänge einander zuordnen lassen; auch wenn der eine mehr Elemente enthalten sollte als der andere, ist die Annahme „sie lassen sich einander zuordnen“ nur falsch, nicht widerspruchsvoll. Handelt es sich aber um zwei Listen, so liegt die Sache anders; dann ist es weder eine empirische Feststellung zu sagen „sie lassen sich einander zuordnen“ noch „sie lassen sich nicht einander zuordnen“. Zwei Beispiele mögen das erläutern.

1. „Sind in diesem Zimmer ebensoviel Personen wie im Nebenzimmer?“ Eine primitive Art zur Entscheidung dieser Frage bestünde darin, daß man von jeder Person des einen Zimmers einen Faden zu einer Person des anderen Zimmers zieht und sich überzeugt, daß zu jeder Person ein Faden führt und daß sich kein Faden spaltet. Das Spannen der Fäden ist hier ein Experiment. Bevor das Experiment ausgeführt ist, kann man ebensogut sagen: die beiden Mengen lassen sich einander zuordnen wie: sie lassen sich nicht einander zuordnen.

2. „Sind 3×4 Tassen gleichzahlig mit 12 Löffeln?“ Auch hier könnte die Entscheidung im Ziehen von Linien bestehen: man stellt etwa die Tassen durch eine Reihe von Punkten dar, ebenso die Löffel, und führt nun von jedem Punkt der einen Reihe eine Linie zu einem Punkt der zweiten. Das Ziehen der Linien ist jetzt kein Experiment, sondern ein Vorgang in einem Kalkül: Wir rechnen eben auf diese Weise aus, ob die beiden Mengen gleichzahlig sind. Der Satz „sie lassen sich einander zuordnen“ ist jetzt ein Satz der Mathematik.

Kehren wir nun zurück! Freges Definition besagte: zwei Mengen sind gleichzählig, wenn es eine Relation gibt, die sie eineindeutig einander zuordnet. Der erste Einwand war: stellt man eine solche Relation her, dann sind die Mengen gleichzählig; stellt man sie nicht her, so sind sie nicht gleichzählig. Man hat zwar etwas definiert, aber nicht den Begriff „gleichzählig“. Man verbessert nun die Definition, indem man erklärt: zwei Mengen sind gleichzählig, wenn man sie eineindeutig einander zuordnen kann, d. h., wenn es Sinn hat zu sagen, daß sie einander eineindeutig zugeordnet sind. Das aber stimmt wieder nicht. Denn sind die beiden Mengen durch ihre Eigenschaften gegeben, so ist es immer sinnvoll, ihr Zugeordnetensein zu behaupten¹⁾; liegen aber zwei Listen vor, z. B. die Listen (a, b, c) und (a', b'), dann ist es ein Widerspruch, von ihnen zu behaupten, sie seien zugeordnet.

Tatsächlich gebrauchen wir das Wort „gleichzählig“ nach verschiedenen Kriterien, von welchen Frege nur eines hervorhebt und zum Paradigma macht. Betrachten wir ein paar Beispiele!

1. Liegen auf dem Tisch 3 Löffel und 3 Tassen, so stellt man mit einem Blick fest, daß sie gleichzählig sind, ohne daß man sie erst Glied für Glied aufeinander beziehen müßte.

2. Ist die Anzahl nicht übersehbar, sind aber die Dinge in ein übersehbares Schema geordnet, wie z. B. die Punktgruppen



so springt einem wieder die Gleichzähligkeit ins Auge.

3. Etwas anders ist der Fall, daß wir etwa von zwei Fünfecken feststellen, daß sie dieselbe Zahl von Diagonalen haben. Hier fassen wir die Gruppierung der Diagonalen nicht mehr unmittelbar auf, vielmehr ist es ein Satz der Geometrie, daß die beiden Klassen gleichzählig sind.

4. Zwei Mengen sind gleichzählig, wenn zwischen ihren Gliedern eine eineindeutige Relation besteht.

5. Das normale Kriterium der Zahlengleichheit ist aber das Zählen (das nicht als eine Abbildung zweier Mengen durch eine Beziehung aufgefaßt werden darf).

¹⁾ Der Leser beachte, daß die Aussage „die beiden Mengen lassen sich einander zuordnen“ einen verschiedenen Sinn hat, je nach dem Kriterium, an dem man die Möglichkeit der Zuordnung erkennt: daß die beiden Mengen gleichzählig sind, oder daß es Sinn haben soll, von einer Zuordnung zu sprechen.

Diesen verschiedenartigen und biegsamen Gebrauch gibt Freges Definition nicht wieder; sie kennt nur ein Schema, in das sie alle Fälle pressen möchte.

Daß diese Auffassung zu seltsamen Konsequenzen führt, kann man sich leicht klar machen. Nach Frege müssen zwei Mengen notwendig entweder gleichzählig sein oder nicht; und zwar aus rein logischen Gründen. Nehmen wir an, daß jemand einen Augenblick auf den Sternenhimmel sieht und gefragt würde, wieviel Lichtpünktchen er gesehen hat — gibt es da die Antwort: „Ich weiß zwar nicht, wieviel Sterne es gewesen sind, aber eine bestimmte Zahl muß ich doch gesehen haben?“ Wie unterschiede sich diese Antwort von der: „Ich habe viele Sterne gesehen?“ (Man vergesse nicht, daß wir nach der Zahl der gesehenen, nicht nach der Zahl der physikalisch vorhandenen Sterne fragen, die man natürlich auf einer photographischen Platte auszählen kann.) Vielleicht sagt man: „Ich habe eben vergessen, wie das Bild ausgesehen hat; aber in dem Moment, da ich es sah, muß ich eine bestimmte Zahl von Lichtpunkten gesehen haben.“ Das heißt: Wenn ich nur einmal zurück könnte zu jenem Augenblick, dann würde ich schon nachschauen, wieviel Sterne dagewesen sind. Aber der Witz ist ja gerade, daß es kein Zurück gibt. Das Erlebnis ist vorbei, ich kann es nicht festhalten, um es nachher in Muße zu betrachten. Es gibt eben keine Methode, die Anzahl festzustellen, und damit verliert die Zahlangabe ihren Sinn.

Man könnte die Sache aber auch anders ansehen. Da man eine kleine Zahl von Sternen — bis etwa zu 5 — noch deutlich auffassen kann und erst dann ihre Zahl zu verschwimmen beginnt, so könnte man sagen: Verwenden wir hier eine neue Zahlenreihe, deren Glieder lauten „1, 2, 3, 4, 5, viele“ — eine Reihe, die wirklich manche primitive Völker gebrauchen. Der Leser wird vielleicht Bedenken tragen hier von einer Zahlenreihe zu sprechen; er wird unseren Vorschlag eher als eine Ausflucht aus einer Verlegenheit ansehen. Wir wollen ihm dann nur zu bedenken geben, daß jene Zahlenreihe durchaus nicht unkomplett ist und wir nicht im Besitz einer kompletteren sind, sondern nur im Besitz einer anderen und komplizierteren, neben der jene primitive zurecht besteht. Man kann auch in dieser Reihe addieren und multiplizieren und alles das in voller Strenge; nur ist sie anderen Zwecken angepaßt. Stellen wir uns vor, es gäbe keinerlei beständigen Dinge in dieser Welt, sondern alles würde vorbeischieben wie die Bilder fallender Tropfen, dann würde uns vielleicht jene Zahlenreihe ebenso natürlich und angemessen erscheinen wie jetzt unsere. Oder ein anderes Beispiel: Denken wir uns, wir sollten Dinge zählen; während wir das tun, verschwinden welche oder es entstehen neue, ohne daß wir es bemerken, so daß wir eine immer andere Zahl herausfänden. Solche Erfahrungen könnten unsere Begriffsbildung in ganz andere Bahnen lenken. Vielleicht würden unbestimmte Zahlworte, wie „wenig“, „viel“, „sehr viel“ —

eventuell mit feineren Abstufungen — an die Stelle unserer Zahlwortreihe treten. Achten wir auf solche Möglichkeiten, so fällt das Vorurteil von uns, daß unsere Zahlenreihe ein ausgezeichnetes, uns gleichsam von Gott geschenktes Gebilde ist, das wesentlich der Grundstein dessen sein muß, was wir Arithmetik nennen.

Freges Definition geht an alledem vorbei. Nach ihr sind zwei Mengen gleichzählig oder nicht, kraft eines rein logischen Gesetzes, ob wir es nun feststellen können oder nicht. Genau so hatte man früher argumentiert, daß die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an sich feststehe, ganz unabhängig davon, durch welche Beobachtungen wir sie erkennen. Aber so ist es nicht, sondern der Sinn einer Aussage erschöpft sich in der Art ihrer Verifikation. Will man wissen, was das Wort „gleichzählig“ bedeutet, so muß man auf die Verfahren achten, nach welchen man tatsächlich die Gleichzähligkeit feststellt. Nur sind diese Verfahren komplizierter und nicht auf ein so einfaches Schema zu bringen wie Frege meinte.

Nur mit wenigen Worten wollen wir auf den zweiten Teil von Freges Definition eingehen. Eine Zahl soll also eine Klasse von Klassen sein. Die Aussage z. B. „auf dem Tisch liegen drei Äpfel“ würde danach bedeuten: dem Begriff „Apfel, der auf dem Tisch liegt“ kommt die Zahl 3 zu; oder: die Klasse der auf dem Tisch liegenden Äpfel ist ein Element der Klasse 3. Diese Deutung, von der Russell selbst meinte, daß sie einigermäßen paradox sei, hat einen großen Vorzug: sie setzt von vornherein in Evidenz, daß die Zahl nicht von den Dingen, sondern von dem Begriff ausgesagt wird, sie vermeidet also gewisse Fehler, welche Frege mit Recht hervorgehoben hat. Aber wird diese Deutung wirklich dem Gebrauch der Zahlworte gerecht? Denken wir uns etwa eine Sprache, die ausschließlich dazu verwendet würde, Befehle zu geben, während sie so etwas wie eine Aussage überhaupt nicht kennt. Wie nun, wenn ich in dieser Sprache den Befehl gebe: „3 Äpfel!“? Hat jetzt das Zahlwort „3“ eine andere Bedeutung? Gewiß nicht; und doch kann dieser Befehl nicht mehr gut nach dem Schema von Frege gedeutet werden; er besagt nicht: die Klasse der Äpfel, die zu holen ist, ist Element der Klasse 3. Denn dies ist eine Aussage, und die kennt unsere Sprache nicht. In der Subjekt-Prädikatform läßt sich der Befehl überhaupt nicht ausdrücken. Freges Definition bindet also den Zahlbegriff in unnötiger Weise an die Subjekt-Prädikatform unserer Sätze. Tatsächlich ergibt sich die Bedeutung des Wortes „3“ aus der Art seiner Verwendung, und von dieser wird später die Rede sein.

Eine zweite Schwierigkeit wird am besten durch eine Argumentation von Russell beleuchtet. Angenommen, sagt Russell, es gäbe genau 9 Individuen auf der Welt. Dann könnten wir die Kardinalzahlen von 0 bis 9 konstruieren,

aber 10, als $9 + 1$ definiert, wäre die Nullklasse. Folglich werden 10 und alle folgenden natürlichen Zahlen miteinander identisch sein, sie wären nämlich sämtlich 0. Um eine solche arithmetische Katastrophe zu verhüten, muß ein besonderes Axiom eingeführt werden, das Unendlichkeitsaxiom. Dieses besagt, daß es einen Typus gibt, dem unendlich viele Individuen angehören. Das erwähnte Axiom stellt eine Aussage über die Welt dar, und von der Wahrheit dieses Axioms hängt nun wesentlich der Aufbau der ganzen Arithmetik ab. Jedermann wird daher begierig sein, zu erfahren, ob dieses Axiom wahr ist. Auf diese Frage müssen wir erwidern: Wir wissen es nicht; wir haben nicht den leisesten Anhaltspunkt dafür, an die Wahrheit dieses Axioms zu glauben. Aber noch schlimmer: Wir können über die Wahrheit dieses Axioms nie etwas ausmachen, da es seiner Natur nach so beschaffen ist, daß es sich jeder Prüfung entzieht. Dann müssen wir aber gestehen, daß diese Annahme keinen angebbaren Sinn hat; denn was soll eine Hypothese, die ewig ungewiß ist? Also: auf eine nicht verifizierbare Annahme über die Welt, auf eine sinnlose Hypothese wird die Möglichkeit der Arithmetik gegründet. Wenn wir diese Auffassung unbefangenen Denkenden vortragen, wen können wir da noch überzeugen? Wer wird noch glauben, daß damit die Lehre von den natürlichen Zahlen tiefer begründet worden ist? Wenn aber der einfache und klare Begriff der Zahl nur unklar und problematisch wird, so urteilen wir mit Recht, daß bestimmt etwas nicht in Ordnung ist mit dieser Theorie und daß sie für eine Aufklärung des Zahlbegriffs nicht in Frage kommt.

Es hilft auch nichts, die Schwierigkeit dadurch zu vermeiden, daß man das Unendlichkeitsaxiom als Bedingung in den mathematischen Sätzen mitführt. Denn so gewinnt man nicht die Mathematik, wie sie tatsächlich vorliegt. Die Mathematik sagt z. B.: die Menge der Brüche ist überall dicht, aber nicht: die Menge der Brüche ist überall dicht, wenn das Unendlichkeitsaxiom zutrifft. Das ist eine künstliche Umdeutung, nur dazu ersonnen, die Lehre aufrecht erhalten zu können, daß die Zahlen aus wirklichen Klassen in der Welt aufgebaut sind.

Fassen wir noch einmal kurz die Bedenken zusammen, so müssen wir sagen: Was den Formalismus betrifft, so schien uns, daß die Auffassung der Zahlen als bedeutungsloser Zeichen mit der Anwendung, welche diese Zeichen schon innerhalb der Mathematik finden, nicht vereinbar ist. Bei der Frege-Russellschen Theorie anerkannten wir, daß sie sich bemüht, den Zahlzeichen eine Bedeutung zu geben. Indem sie aber diese Bedeutung mit den tatsächlichen Klassen in der Welt in Verbindung setzt, bringt sie ein Element des Empirischen, Zufälligen in die Arithmetik hinein und zerstört damit die Apriorität, die das Kennzeichen der Mathematik ist.

C. Ausblick.

Wir stehen also neuerdings vor der Frage: Was ist eine Zahl? Keine der bisherigen Richtungen hat uns eine klare Antwort gegeben. Es könnte fast scheinen, daß im einfachen Begriff der Zahl ein Geheimnis verborgen sei, das sich gegen das Erfäßtwerden durch den Verstand sträubt. Aber wie oft in solchen Fällen sollte man zuerst überlegen, ob nicht der Grund des Mißerfolges in der falschen Fragestellung liegt. Mit der Frage: „Was ist eine Zahl?“ verhält es sich in mancher Hinsicht ähnlich wie mit der Frage des hl. Augustinus: „Was ist die Zeit?“ Wir alle verstehen dieses Wort und wissen es im täglichen Leben zu gebrauchen; werden wir aber gefragt, was die Zeit ist, so geraten wir in Verlegenheit und möchten mit Augustinus sprechen: „Wenn man mich nicht fragt, weiß ich es; wenn man mich fragt, weiß ich es nicht.“

Um das Rätsel aufzuklären, brauchen wir uns nur zu besinnen, was wir denn tun würden, um jemandem den Sinn dieses Wortes zu erklären. Wir würden ihm an verschiedenen Beispielen zeigen, wie man das Wort gebraucht; z. B. in den Fällen: „Ich habe jetzt keine Zeit“, „Jetzt ist nicht die Zeit dazu“, „Meine Zeit ist um, ich muß gehen“, „Um welche Zeit willst du kommen?“, „Die Zeit ist sehr rasch vergangen“, „Ich mußte lange Zeit warten“, „In alten Zeiten lebte einmal . . .“. Als Antwort auf die Frage Augustins geben wir also Anwendungsweisen. Wir verknüpfen dieses Wort mit anderen Worten, wir gliedern es in verschiedene syntaktische Zusammenhänge ein, wir fahren gleichsam all die Linien nach, die der Sprachgebrauch für dieses Wort gebahnt hat und damit erklären wir seinen Sinn. In der Tat, wer imstande ist, das Wort „Zeit“ in den verschiedenen Beispielen zu verstehen und es anzuwenden, der weiß eben, „was die Zeit ist“, und keine Formulierung kann es ihm besser sagen. Die Frage: „Was ist die Zeit?“ führt uns irre, denn sie läßt uns nach einer Antwort von der Form suchen „die Zeit ist . . .“, und die gibt es nicht.

Wenn wir uns mit dieser Einstellung der Frage zuwenden, was die Zahlen sind, so werden wir nicht mehr dem suggestiven Bann der Frage erliegen. Statt das Wesen der Zahl in eine Formel zu fassen, werden wir den Gebrauch des Wortes „Zahl“ und der Zahlwörter beschreiben.

Wie also erklärt man die Zahlwörter? Gibt es hier etwa eine hinweisende Definition? Für den Anfang der Reihe schon: Man deutet etwa auf irgendeine anschauliche Gruppe, oder umschreibt sie mit einer Bewegung und sagt: 2 Nüsse, 3 Äpfel usw.; und diese Erklärung ist nicht schlecht. Bei größeren Zahlen versagt sie freilich, und das macht uns schon auf einen gewissen Unterschied aufmerksam, den man durch die Worte „visuelle Zahl“, „gezählte Zahl“ bezeichnen könnte. Daß im Griechischen die ersten vier Zahlwörter

dekliniert werden, die anderen nicht, ist wohl ein Anzeichen dafür, daß man hier früher einen Unterschied in der Auffassung der Zahlen empfunden hat.

Normalerweise ist der Gebrauch der Zahlworte mit dem Zählen verknüpft. Wie das Zählen vor sich geht, das brauchen wir nicht zu schildern; lieber wollen wir einem Einwand zuvorkommen, der sich schon geregt haben wird: daß dies eine Methode ist, wie Kinder die Zahlworte erlernen, aber nicht eine wissenschaftliche Erklärung des Zahlbegriffs. Diese müsse exakt und vollständig sein. Aber der Sinn der Zahlwörter ergibt sich aus ihrer Verwendung, und diese ist eine vielfältige. Wenn wir einem Kind beibringen, auf Befehle wie „6 Äpfel!“ von 1 bis 6 zu zählen und bei jedem Wort einen Apfel herzulangen — ist es sich nun über den Sinn des Wortes „6“ nicht klar? Hat es nur einen rohen oder beiläufigen Begriff von der Zahl 6? Muß erst der Logiker den wahren Sinn herausfinden? Wir haben ja alle in der Kindheit die Zahlworte so gelernt und verstehen sie seither; und wir kennen keine bessere Erklärung. Warum also sollten wir uns ihrer schämen? Tatsächlich ist die Art, wie die Kinder auf der Schule die Zahlen lernen — mit Strichen, mit Kugeln usw. — vollkommen korrekt.

Zuerst muß also Klarheit über das Ziel bestehen. Wir suchen nicht nach einer Definition des Zahlbegriffs, sondern nach einer Klärung der Grammatik der Zahlworte und des Wortes „Zahl“. Der eigentliche Grund, warum man sich um eine Definition bemühte, war wohl der, daß man meinte, dadurch die Grundlagen der Arithmetik vertiefen zu können. Die Sätze der Arithmetik sollten sich als rein logische Wahrheiten erweisen. Es sei gestattet, unsere Stellung in dieser Frage wenigstens anzudeuten.

Nach unserer Meinung besteht die Mathematik nicht aus Tautologien. Sie ist kein Zweig der Logik, sondern völlig autonom und ruht nur auf ihren eigenen Festsetzungen. Der Glaube, daß die Mathematik durch Zurückführung auf die Logik sicherer begründet, glaubhafter würde, ist ja überhaupt nur ein Mißverständnis. Ohne auf diese Dinge im einzelnen einzugehen, wollen wir nur bemerken, daß sich heute die Möglichkeit einer neuen Auffassung auftut, nach der die Mathematik weder aus empirischen Sätzen (Mill) noch aus synthetischen Urteilen a priori (Kant, Hamilton, Poincaré) noch aus analytischen Sätzen respektive Tautologien (Frege, Russell, Ramsey, Hahn, Carnap u. a.) besteht, sondern eine Reihe von deduktiven Systemen enthält, welche die Folgerungen aus willkürlich gewählten Voraussetzungen entwickeln. Die Logik ist nur einer dieser Kalküle, an sich nicht wichtiger als die anderen. Diese Auffassung ist eigentlich die axiomatische, die nur ergänzt werden muß durch die Aufdeckung des Zusammenhangs, der zwischen den mathematischen Symbolen und den Wortbedeutungen der Umgangssprache besteht. Die Untersuchung dieses Zusammenhangs fällt in den

Rahmen der allgemeinen logischen Grammatik, zu der sich gerade heute so erfolgversprechende Ansätze zeigen. Es handelt sich hier darum, die Verwendung der Zahlworte und des Gleichheitszeichens innerhalb der Sprache in genaue Regeln zu fassen. Und hiebei werden all die Tatsachen zu berücksichtigen sein, die wir hinsichtlich der Verwendung des Wortes „gleichzahlig“ und der Zahlwörter angeführt haben.

Was den Sinn einer Gleichung betrifft, so wollen wir nur erwähnen, daß $a = b$ in der Mathematik so verwendet wird wie eine Regel, welche ausdrückt, daß a , wo immer es vorkommt, durch b ersetzt werden darf. Im Zusammenhang der Sprache wieder ist $2 + 2 = 4$ eine Schlußregel, die zum Übergang zwischen Sätzen dient. So kann ich aus den Sätzen „ich habe in meiner linken Tasche 2 Schilling“ und „ich habe in meiner rechten Tasche 2 Schilling“ schließen, daß ich in beiden Taschen 4 Schilling habe. Die Gleichung entspricht also nicht einer Tautologie, sondern einer Anweisung. (Auch innerhalb der Logik muß man zwischen diesen beiden wohl unterscheiden.) Die Gleichung enthält in gewissem Sinne ein aus-sagendes Element und steht einem empirischen Satz viel näher als einer Tautologie. Sie ist eben eine Regel, die unser Handeln führt (ähnlich einer Zugregel im Schach), die befolgt oder übertreten wird. Wäre die Gleichung eine Tautologie, so wäre alles das unmöglich. Denn was sollte es heißen, eine Tautologie zu befolgen oder sie zu verletzen?

Soviel ist gewiß: die Auffassung, daß die gesamte Mathematik die zwingende Folge einiger weniger Sätze, etwa der fünf Axiome Peanos ist, daß die Wahrheit des ganzen Systems gesichert ist, wenn die Wahrheit der fünf Grundsätze feststeht, diese Meinung läßt sich heute nicht mehr halten. Die Mathematik ist nicht ein System, sondern eine Vielheit von Systemen, wir müssen sozusagen immer von neuem zu bauen beginnen, und damit verliert die versuchte Zurückführung der Axiome Peanos auf rein logische Sätze viel von ihrem Wert.

Wir werden sagen: die Sätze der Arithmetik sind weder wahr noch falsch; sondern nur verträglich oder unverträglich mit gewissen Festsetzungen. Durch diese Betrachtung wird ein gewisser Dualismus überwunden, der heute in der Grundlagenforschung herrscht: Von den Gesetzen der natürlichen Zahlen glaubt man, daß sie ewige und unumstößliche Wahrheiten ausdrücken; während man von den ganzen rationalen und reellen Zahlen einsehen gelernt hat, daß ihre Gesetze bloße Konventionen sind. Das ist eine Halbheit, eine innere Inkonsequenz, und die ganze bisherige Entwicklung der Arithmetik zeigt, welchen Weg wir zu gehen haben.

Der Leser wird fragen: „Wenn die Grundgesetze der Arithmetik will-kürliche Setzungen sind, kann man sie da nicht abändern und zu einer neuen

Arithmetik gelangen?“ Wir erwidern: Gewiß. Die Möglichkeit der Zahlenreihe „1, 2, 3, 4, 5 viele“ wurde schon erwähnt. Denken wir uns, eine Strecke werde durch Punkte in Teile zerlegt, dann hat es Sinn zu sagen: die Strecke hat 2, 3, 4 . . . Teile, aber nicht: sie hat einen Teil. Man möchte hier viel lieber zählen

0, 2, 3, 4 . . .

und das entspricht der Satzreihe: „die Strecke ist ungeteilt“, „die Strecke ist in zwei Teile geteilt“ usw. D. h. wir zählen hier die Teile nicht nach dem Schema, das wir sonst verwenden. Dieser Fall gibt uns eine Vorstellung von Zahlenreihen, denen gewisse Zahlen abgehen, und zwar so, daß ihr Fehlen gar nicht bemerkt wird. Es wäre interessant, sich eine Arithmetik und eine Möglichkeit ihrer Anwendung auszudenken, welche die Zahl 5 nicht kennt, ohne daß das Fehlen dieser Zahl als Mangel empfunden wird.

Aber nicht nur die Zahlenreihe, auch die Operationen können wir uns geändert denken. Stellen wir uns vor, wir sollen eine Addition von vielen Millionen Zahlen ausführen. Die Ergebnisse zweier Rechner werden dann nicht übereinstimmen. Fragen wir nun: Kommt hier der Begriff der Wahrscheinlichkeit in die Arithmetik hinein? Ist nun die Rechnung eine Art Experiment? Hier kann man, scheint es, zwei Standpunkte einnehmen: Entweder man hält an den Regeln des Addierens fest und sagt: einer der Rechner muß sich geirrt haben. Oder man führt für diesen Fall einen neuen Kalkül ein, der der Addition nur ähnlich ist, einen Kalkül, in welchem man nicht mehr von einer bestimmten Summe reden kann oder wo man sagen müßte: die Summe liegt zwischen den und den Grenzen. Das Verfolgen solcher Möglichkeiten wäre für die Philosophie der Arithmetik sehr nützlich. Denn wir sähen dann unsere Arithmetik wirklich sich von einem Hintergrund anderer und verwandter Kalküle abheben und verstünden deutlicher, welchen Tatsachen der Wirklichkeit unsere Arithmetik angepaßt ist.

Jetzt überschauen wir wohl den Irrtum, der in der These der logischen Schule liegt. Durch die Zurückführung der Arithmetik auf die Logik glaubte man die Arithmetik fester untermauert zu haben. Die Gesetze der Logik hielt man ja für die sichersten aller Wahrheiten, für „Grundsteine, in einem ewigen Grund befestigt, von unserem Denken überflutbar zwar, aber nicht verrückbar“ (Frege). Durch eine rein logische Definition des Zahlbegriffs wollte man so Ausgangspunkte für strenge Deduktionen schaffen, welche die Wahrheiten der Arithmetik auf die tieferen der Logik zurückführen. Allein der Ausdruck „die Arithmetik begründen“ gibt uns ein falsches Bild; weil es so aussieht, als ob ihr Gebäude auf gewissen Grundwahrheiten errichtet sei; während sie ein Kalkül ist, der nur von gewissen Festsetzungen ausgeht, aber frei schwebend ist wie das Sonnensystem und auf nichts ruht.

Der Schluß, der sich hieraus ergibt, ist der: Wir können die Arithmetik nur beschreiben, d. h. ihre Regeln angeben, nicht begründen. Eine Begründung kann uns schon darum nicht genügen, weil sie einmal aufhören muß und dann auf etwas verweist, das sich nicht mehr begründen läßt. Nur die Festsetzung ist das Letzte. Alles, was aussieht wie eine Begründung, ist eigentlich schon verfälscht und darf uns nicht befriedigen.

10. Limes und Häufungspunkt.

Das Rechnen mit unendlichen Prozessen gibt der Mathematik des 17. und 18. Jahrhunderts ihre Signatur. Wie wenig jedoch die Mathematiker zu klaren Ideen gelangt waren, mag ein Problem bezeugen, das im 18. Jahrhundert vielfach erörtert worden ist, das Problem, welches die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

ist, Der Camaldulenser Mönch Guido Grandi ging in einer Schrift im Jahre 1703 von der geometrischen Reihe aus

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

welche die Summe $\frac{1}{1-x}$ ergibt und erhielt daraus für $x = -1$ das Resultat

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

In einer sieben Jahre später erschienenen Schrift, die dem Deo veritatis, luminum patri, scientiarum domino, geometriae praesidi gewidmet ist, kommt er auf dieses Ergebnis zurück und sucht es durch Erzählung einer Parabel zu rechtfertigen: Zwei Brüder erben in einer Teilung aus dem väterlichen Nachlaß einen Stein von unschätzbarem Wert, den zu veräußern das Testament verbietet; daher kommen sie unter sich darin überein, daß der Stein abwechselungsweise in dem Museum eines jeden je ein Jahr lang niedergelegt werde. Wenn nun festgesetzt wird, daß diese Bestimmung in alle Ewigkeit zwischen den beiden Familien gelten solle, so wird der Familie jedes Bruders der Stein unendlich oft gegeben, unendlich oft genommen und doch hat jeder den halben Besitz des Steines. Merkwürdig ist übrigens, daß Grandi aus der Formel

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2},$$

indem er immer zwei aufeinanderfolgende Glieder zusammenfaßt, schließt, daß

$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}$$

ist, worin er einen Beweis für die Möglichkeit der Schöpfung der Welt aus dem Nichts findet¹⁾.

¹ Diese und die folgenden historischen Bemerkungen nach Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, 1889.

Die Schrift von Grandi gab Anlaß zu einer Auseinandersetzung zwischen Leibniz und Wolff, Grandi und Varignon. Wolff fragte Leibniz um seine Ansicht über die merkwürdigen Dinge, die in Grandis Buch stehen und Leibniz gab in einem Brief, der 1713 in den Acta eruditorum veröffentlicht wurde, seine Meinung ab. Mit der juridischen Erklärung Grandis ist er durchaus nicht einverstanden; in der Sache aber stimmt er ihm zu und sucht sein Ergebnis durch folgende Überlegung zu stützen: Bricht man die Reihe nach einer geraden Anzahl von Gliedern ab, so erhält man als Summe 0, bricht man sie nach einer ungeraden Anzahl ab, 1. Nun ist aber die Reihe unendlich, und da wir dem Unendlichen weder den Charakter einer geraden noch einer ungeraden Zahl zuschreiben können, so kann die Reihe weder die Summe 1 noch die Summe 0 haben. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt nun, daß man, wenn zwei Werte für eine Größe gleich wahrscheinlich sind, ihr arithmetisches Mittel als den wahren Wert nehmen muß; daher muß man der Reihe gerechterweise den Wert $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ beilegen. Obwohl diese Art des Argumentierens, fügt Leibniz hinzu, mehr metaphysisch als mathematisch zu sein scheint, so ist sie dennoch vollkommen sicher.

Wesentlich gestützt auf die Autorität von Leibniz hat Euler später gemeint, daß jede unendliche Reihe eine bestimmte Summe besitzen muß; und darin war er mit Goldbach, Daniel Bernoulli und anderen großen Mathematikern seiner Zeit einig. Ja, Euler berief sich (in einem Brief an Goldbach 1745) ausdrücklich darauf, daß der Wert einer unendlichen Reihe gleich ist dem Wert des analytischen Ausdrucks, durch dessen Entwicklung die Reihe entsteht. Wie trügerisch diese Überzeugung ist, geht daraus hervor, daß man verschiedene Ausdrücke bilden kann, deren Entwicklung auf dieselbe Reihe führt; so ist z. B.

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^7 + \dots$$

eine Reihe, die für $x = 1$ wieder auf die Grandis führt; wir würden also mit demselben Recht „beweisen“ können, daß

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{2}{3}$$

ist. Welches ist also der wahre Wert dieser Reihe?

Die Analyse dieser Frage ließ erkennen, daß es sich da um ein typisches Scheinproblem handelt. Man muß erst definieren, was man unter der Summe einer unendlichen Reihe versteht; denn das Wort „Summe“ ist ja zunächst nur für endlich viele Zahlen erklärt. Dabei zeigt sich, daß die Definition der Summe einer unendlichen Reihe auf einen fundamentaleren Begriff führt, auf den des Grenzwertes, dem wir uns jetzt zuwenden wollen.

Was versteht man unter einem Grenzwert? Wir wollen das zuerst an einem Beispiel erläutern und betrachten zu diesem Zweck den Ausdruck $\frac{n-1}{n}$;

setzt man hierin der Reihe nach für n die Werte $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ so erhält man $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ und diese Folge von Zahlen kommt dem Werte 1 umso näher, je weiter man sie fortsetzt; man meinte nun, daß unser Ausdruck für $n = \infty$ geradezu den Wert 1 annehme und faßte dabei unbedenklich das Unendliche selbst als Zahl auf. Diese Vorstellung kann vor der Kritik nicht bestehen. Denn was soll man sich eigentlich unter einer unendlichen Zahl denken? Daß unendlich nicht ein scharf umrissenes Zahlenindividuum ist wie etwa die Zahl 5, ist klar. Die Attribute: gerade, ungerade, Primzahl, teilbar usf. finden auf das Unendliche keine Anwendung. Es hat also keinen präzisen Sinn zu sagen, daß man für n den „Wert unendlich“ setzt. In unserem Beispiel bedeutet n vielmehr eine endliche Zahl, die fortgesetzt wächst. n ist gewissermaßen niemals unendlich, sondern wird nur unendlich. Im Begriff des Unendlichen liegt immer ein Werden, das nie zum Abschluß kommt. Man nennt diesen Begriff des Unendlichen auch den des Potential-Unendlichen (zum Unterschied von dem des Aktual-Unendlichen, der eine unendliche Totalität meint). — Die Formel liefert also nie 1. Wenn man sagen wollte, daß die Glieder der Folge allmählich in 1 übergehen, so wäre das um nichts klarer; denn die Glieder der Folge sind eben niemals 1; wir werden statt dessen richtiger sagen, daß der Ausdruck $\frac{n-1}{n}$ für unendlich wachsendes n unbegrenzt gegen 1 strebt und werden die Zahl 1 als den Grenzwert oder den Limes dieser Folge auffassen. Der Grenzwert ist also gedanklich etwas Neues, das zu dem Vorrat der wirklich in der Folge vorkommenden Zahlen hinzugefügt wird und zu diesen nur in einer bestimmten Beziehung steht. Um das anzudeuten, bedient man sich seit Cauchy der Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Indem wir diesen Begriff des Grenzwertes ein wenig anders formulieren, gelangen wir schließlich zu derjenigen Auffassung, welche heute herrschend ist. Statt zu sagen, der Ausdruck $\frac{n-1}{n}$ habe den Grenzwert 1, kann man offenbar auch sagen, die Reihe der Zahlen $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ unterscheide sich von 1 umso weniger, je weiter man sie fortsetzt, oder der Unterschied zwischen 1 und $\frac{n-1}{n}$ werde umso kleiner, je größer die Zahl n wird. In der kurzen, aber äußerst prägnanten Formelsprache der Mathematik drückt man das folgendermaßen aus: die Differenz $1 - \frac{n-1}{n}$ sinkt schließlich unter jeden noch so kleinen Wert ε hinab, d. h. es wird

$$1 - \frac{n-1}{n} < \varepsilon,$$

wofern nur n einen gewissen Betrag N übersteigt, d. h. wofern nur

$$n > N \quad \text{ist.}$$

Um z. B. die Differenz unter 0·002 hinabdrücken, genügt es, $N = 500$ zu wählen. D. h. von der 500. Stelle ab unterscheiden sich die Glieder der Folge von dem Grenzwert 1 um weniger als 0·002. Je kleiner ich das ε wähle, d. h. je dichter die Glieder der Folge an 1 heranrücken sollen, desto größer wird das n werden, d. h. desto weiter muß ich in der Zahlenfolge hinausschreiten.

In dieser Beziehung zwischen den Zahlen ε und N spricht sich genau dieselbe Tatsache aus wie in der Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$; sie ersetzt geradezu diese Aussage. Vergleicht man diese beiden Aussagen miteinander, so ist anfänglich nicht einzusehen, welche Vorzüge die zweite besitzen soll; man könnte eher sagen, daß sie viel komplizierter ist. Ein Umstand verleiht ihr aber einen ganz gewaltigen Vorzug: in ihr kommt vom Unendlichen nichts mehr vor; sie ist vielmehr ein System von Relationen, die sich durchaus auf endliche Größen beziehen. Aus diesem Beispiel geht nun eine Einsicht von außerordentlicher Tragweite hervor, die sich so aussprechen läßt: Wenn in einer mathematischen Aussage der Begriff „unendlich“ vorkommt (im Sinne des Potential-Unendlichen), so läßt sich derselbe Sachverhalt auch durch ein System von Aussagen beschreiben, in die nur Beziehungen zwischen endlichen Zahlen eingehen. Man könnte somit den Ausdruck „unendlich“ ganz aus dem Wortschatz der Mathematik verbannen, ohne damit das Geringste von dem Inhalt ihrer Sätze zu opfern. Ja man mag sogar einen eigenen Reiz daran finden, die Infinitesimalrechnung so aufzubauen, daß man dabei auch nicht ein einzigesmal, sei es mittelbar oder unmittelbar, den Begriff des Unendlichen verwendet; daß ein solcher Aufbau möglich ist, steht außer Zweifel; dennoch ist ein Versuch dazu schwerlich auch nur unternommen worden; vielmehr hat man Gründe, das Unendliche auch weiterhin in den Formeln mitzuführen, aber nicht im Sinn eines Urbegriffes. Die Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

erweist sich nämlich in den Rechnungen als so viel bequemer und zweckmäßiger als das komplizierte System von Ungleichungen, daß es vorteilhaft ist, das Unendliche als eine façon de parler beizubehalten. Dieser Begriff ist also ein Symbol, dessen wir uns bedienen, um gewisse verwickelte Beziehungen in kurzer und übersichtlicher Weise zu beschreiben.

Wir wollen jetzt den Begriff des Grenzwertes allgemein formulieren. Man sagt, daß die unbegrenzt fortsetzbare Folge von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

gegen den Grenzwert a konvergiert, in Zeichen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

wenn die Zahlentolge, genügend weit fortgesetzt, beliebig nahe an a heranrückt, d. h. wenn

$$a - a_n < \varepsilon,$$

wofern nur $n > N$ ist.

Diese Formulierung besagt: Einen wie kleinen „Schwellenwert“ ε man mir auch vorgibt, stets kann ich einen Index N finden, so daß die Glieder

$$a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots$$

von dem Grenzwert a um weniger als ε abweichen. Eine Folge, die nicht konvergiert, wird divergent genannt.

Nur ein Punkt ist noch zu beachten. Unser Kriterium, wie es dasteht, drückt noch nicht das aus, was wir sagen wollen. Denn wenn ich statt des Grenzwertes a irgend eine andere Zahl a^* nehme, die nur kleiner ist als alle Zahlen der Folge, so wäre das Kriterium für diese Zahl a^* erfüllt. Denn $a^* - a_n$ ist eine negative Zahl, was immer n sein mag, also gewiß kleiner als ε . Das Kriterium drückt also nur aus, daß a von allen Zahlen der Folge übertroffen wird, aber nicht, daß a der Grenzwert der Folge ist. Doch ist es leicht, dem abzuhelfen: wir brauchen nur hinzuzufügen, daß die Differenz $a - a_n$ ihrem absoluten Betrag nach (d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) beliebig klein werden soll. Wir schreiben, um das anzudeuten, das Kriterium in der Form

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ für } n > N.$$

N wird dabei abhängen von ε ; je kleiner ε gewählt wird, desto größer wird im allgemeinen die Zahl N genommen werden müssen; will man diese Abhängigkeit betonen, so kann man die zweite Ungleichung in der Form schreiben

$$n > N(\varepsilon).$$

Das Fundament dieser ganzen Erörterungen ist der Begriff der Zahlenfolge, den wir jetzt etwas genauer betrachten wollen. Eine Zahlenfolge entsteht, wenn man die Glieder der Reihe $1, 2, 3, 4, \dots$ durch irgendwelche andere Zahlen ersetzt, 1 durch a_1 , 2 durch a_2 usw. Aber wie ist das zu verstehen? Etwa so, daß wir diese Ersetzungen nach Willkür vornehmen? Sollen wir die Möglichkeit unendlich vieler Wahlakte zulassen? Oder sollen wir verlangen, daß die Glieder der Folge nach einem Gesetz gebildet sind? Darüber sind die Ansichten geteilt. Manche Mathematiker wollen ausdrücklich auch gesetzlose Folgen zulassen. Diese Ansicht führt zu gewissen Schwierigkeiten, die wir später darlegen wollen. Tatsächlich angewendet werden jedenfalls nur Folgen, für die man ein bestimmtes Bildungsgesetz kennt. Unter einem solchen Gesetz ist entweder eine Formel zu verstehen, z. B. $a_n = \frac{n-1}{n}$; oder eine Beschreibung in Worten; das Bildungsgesetz der Formel

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

kann man nicht anders ausdrücken, als indem man sagt: an der n -ten Stelle soll die n -te Primzahl stehen. Man kennt heutzutage keine Formel, nach der sich die Primzahlen berechnen lassen. Man kann daher das sprachlich ausgedrückte Gesetz in keine Formel umsetzen. Dennoch liegt hier eine klare Vorschrift zur Bildung einer Zahlenfolge vor. Das Wesentliche ist, daß diese Vorschrift jeder natürlichen Zahl n eine ganz bestimmte Zahl a_n zuweist.

Eine weitere Schwierigkeit ist diese: Nach unserer Erklärung liegt eine Folge dann vor, wenn wir ein Gesetz kennen, nach welchem die Glieder der Folge gebildet sind. Diese Erklärung wäre dann präzise und deutlich, wenn es der Begriff des Gesetzes wäre. Allein ist er das? Wenn wir die Sache etwas näher betrachten, müssen uns alsbald Bedenken aufsteigen. Nehmen wir an, wir bilden eine Reihe von Zahlen t_1, t_2, t_3, \dots nach folgender Vorschrift: die Zahl t_n soll 1 sein, wenn sich drei ganze Zahlen x, y, z finden lassen, so daß

$$x^n + y^n = z^n$$

ist; ist diese Gleichung in ganze Zahlen unlösbar, so soll $t_n = 0$ sein. Die Reihe fängt also so an:

$$1, 1, 0, 0, 0, \dots$$

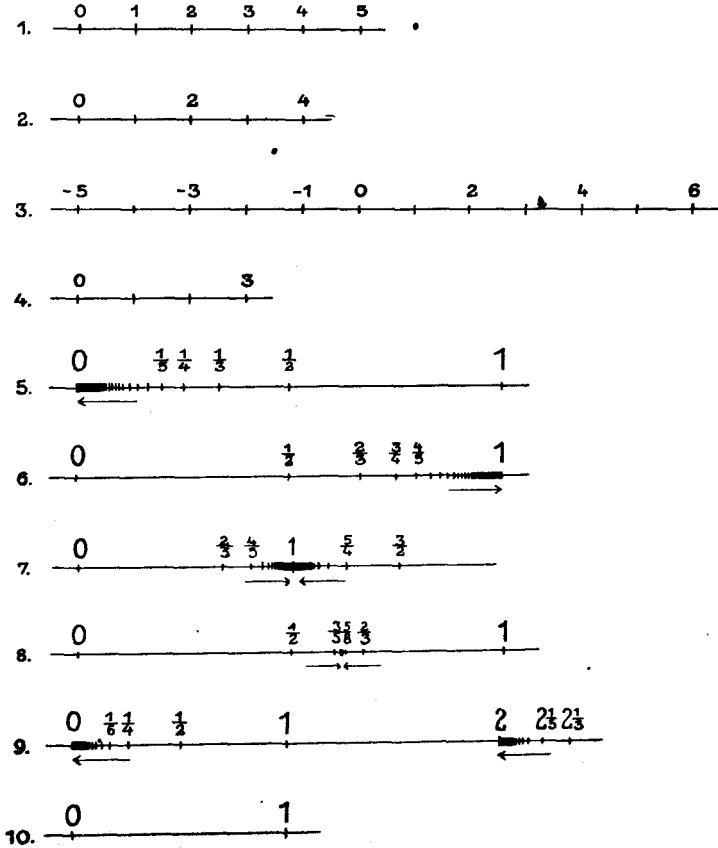
und niemand kann heute sagen, ob auf die beiden ersten Einsen lauter Nullen folgen oder nicht. Die Entscheidung hierüber hängt von der Lösung eines berühmten zahlentheoretischen Problems ab. Hat Fermat, nach dem dasselbe benannt ist, mit seiner Vermutung recht, dann folgen lauter Nullen; hat er unrecht, dann werden irgendwo Einsen auftreten. Bewiesen ist heute nur, daß Fermats Behauptung zutrifft für alle Zahlen n im ersten Hundert und für manche größere Zahlen. Bis 100 können wir also unsere Reihe fortsetzen, dann aber wird ihr Aussehen ungewiß. Da es gar nicht gesagt ist, daß dieses Problem eine Lösung zuläßt, werden wir möglicherweise nie wissen, wie die Reihe weitergeht. Ist nun unsere Vorschrift ein Gesetz? Oder stellt sie erst dann ein Gesetz dar, wenn die Lösung des Fermat'schen Problems gelungen ist?

Der Begriff der Zahlenfolge ist also nicht frei von Schwierigkeiten. Doch wollen wir einstweilen diesen Punkt auf sich beruhen lassen und uns im Reich der Folgen ein wenig zu orientieren suchen. Wir wollen jetzt einige Zahlenfolgen betrachten und das Gesetz zu erraten suchen, nach dem sie gebildet sind.

1. 1, 2, 3, 4, ... $a_n = n$.
2. 2, 4, 8, 16, ... $a_n = 2^n$
3. -1, 2, -3, 4, ... $a_n = (-1)^n \cdot n$
4. 3, 3, 3, 3, ... $a_n = 3$

5. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n}$
 6. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ $a_n = \frac{n-1}{n}$
 7. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$
 8. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$ das Gesetz dieser Folge kann man nur durch eine Rekursionsformel ausdrücken; bezeichnet $\frac{p_n}{q_n}$ das n-te Glied der Folge, so ist $p_1 = 1, q_1 = 1$ und $p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = p_n + q_n$.
 9. $3, \frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n} [n - (-1)^n \cdot n + 1]$.
 10. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ $a_n = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n]$.

Diese zehn Folgen zeigen große Strukturverschiedenheiten. Ein klares Bild gewinnen wir, wenn wir sie geometrisch darstellen. Es ergeben sich dann die nachstehenden Bilder:



Figur 11.

Der wichtigste Unterschied, der uns ins Auge fällt, ist der: ein Teil der Folgen zerstreut sich ins Unendliche (1—3); ein anderer Teil (5—8) drängt sich gegen einen bestimmten Punkt zusammen, konvergiert gegen diesen Punkt (im Beispiel 5 ist es der Punkt 0, in den Beispielen 6 und 7 der Punkt 1, im Beispiel 8 ein Punkt, der jedenfalls zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ gelegen ist und den wir nicht weiter kennen); die Annäherung an den Grenzpunkt erfolgt dabei manchmal durch wachsende Zahlen hindurch, von links her (6); manchmal durch abnehmende Zahlen hindurch, von rechts her (5); und manchmal von beiden Seiten (7 und 8): die Glieder der Folge umhüpfen gleichsam den Grenzwert und schließen ihn in immer engere Intervalle ein. Eine dritte Art von Folgen läßt schließlich mehrere Verdichtungszentren erkennen, gegen die sie sich zusammendrängen. Die Folge 9 verdichtet sich z. B. gegen die Punkte 0 und 2. Die übrigen Beispiele bestehen in der unendlichen Wiederholung eines oder mehrerer Punkte. Auf sie werden wir später zurückkommen.

✦ Für das Studium der Folgen ist die Frage sehr wichtig, ob es Stellen auf der Zahlenlinie gibt, wo sie sich gleichsam kondensieren, unendlich dicht zusammendrängen; wir werden solche Stellen „Häufungspunkte“ nennen und das eben beschriebene anschauliche Verhalten in eine strenge Definition zu fassen suchen.

Wann also wollen wir einen Punkt einen Häufungspunkt nennen? Offenbar dann, wenn in seiner unmittelbaren Nachbarschaft (rechts oder links von ihm oder zu beiden Seiten) ein schreckliches Gedränge von Gliedern der Folge herrscht; wir definieren somit: Ein Punkt heißt dann ein Häufungspunkt der Folge, wenn in jedem noch so kleinen Intervall, das man um diesen Punkt konstruiert, bereits unendlich viele Glieder der Folge gelegen sind.

Der Leser wird gut daran tun, sich in den Sinn dieser Definition mittels anschaulicher Behelfe einzuleben. Er stelle sich zu dem Zweck etwa die Punkte der Folge als Perlen vor, die auf einem Faden aufgereiht sind. Die Definition besagt dann folgendes: schneidet er ein noch so kleines Fadenstückchen heraus, das einen Häufungspunkt im Innern enthält, dann hat er zugleich damit unendlich viele Perlen herausgeschnitten.

Ein Grenzwert ist danach immer ein Häufungspunkt; aber nicht umgekehrt: ein Häufungspunkt braucht noch kein Grenzwert zu sein (siehe Beispiel 9). Wie ist nun das genaue Verhältnis zwischen diesen Begriffen zu formulieren? Das ergibt sich, wenn wir nachsehen, in welchen Eigenschaften diese beiden Gebilde übereinstimmen und in welchen nicht. Gemeinsam ist beiden, daß in jedem noch so schmalen Intervall, das man um einen solchen Punkt schlägt, unendlich viele Punkte der Folge gelegen sind. Der Unterschied ergibt sich, sobald man auf die Glieder achtet, die außerhalb des Inter-

valls bleiben: im Falle eines Grenzwertes sind es nur endlich viele, im Falle eines Häufungspunktes (der nicht zugleich Grenzwert ist) unendlich viele. Wenn ich etwa im Beispiel 9 um den einen Häufungspunkt 2 ein kleines Intervall schlage, sagen wir mit dem Radius $\frac{1}{1000}$ (also das Intervall von 1·999 bis 2·001), so liegen in diesem Intervall gewiß unendlich viele Punkte der Folge; aber außerhalb desselben liegen unendlich viele andere, nämlich alle die, die sich gegen den Häufungspunkt 0 zusammendrängen. Hat dagegen die Folge einen Limes, dann gehen in jedes Intervall, das den Limes enthält, „fast alle“ Glieder der Folge (d. h. alle, mit Ausnahme von höchstens endlich vielen). Mit Hilfe dieses Ausdrucks „fast alle“¹⁾ kann man den Wortlaut der beiden Definitionen ziemlich ähnlich gestalten:

Häufungspunkt ist ein Punkt, der in jeder noch so engen Umgebung unendlich viele Glieder der Folge enthält.

Limes ist ein Punkt, der in jeder noch so engen Umgebung fast alle Glieder der Folge enthält.

Besteht aber die Folge (wie in den Beispielen 4 und 10) aus der unendlichen Wiederholung eines oder mehrerer Glieder, so versagen diese Definitionen; und doch ist es für den Kalkül nützlich, auch in solchen Fällen der Folge einen Grenzwert, resp. einen Häufungspunkt zuzuschreiben. Demgemäß fassen wir diese Begriffe etwas weiter, indem wir erklären:

a heißt Häufungspunkt der Folge a_1, a_2, a_3, \dots , wenn für unendlich viele n

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ ist;}$$

a heißt Grenzwert der Folge a_1, a_2, a_3, \dots , wenn für fast alle n

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ ist;}$$

wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet.

Schon der erste Blick hat uns außerordentliche Unterschiede enthüllt: Folgen, die keinen Häufungspunkt besitzen, solche, die genau einen Häufungspunkt aufweisen und solche, die mehrere Häufungspunkte haben.

Vielleicht meint der Leser, daß die Folgen mit genau einem Häufungspunkt identisch sind mit den konvergenten Folgen. Das wäre ein Irrtum. Betrachten wir die Folge

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \dots$$

Für jedes ungerade n ist hier $a_n = n$, für jedes gerade n ist $a_n = \frac{1}{n}$. Diese Folge hat ersichtlich den einzigen Häufungspunkt 0; dennoch ist er nicht Grenzwert, weil sich unendlich viele andere Glieder der Zahlenfolge ins Unbegrenzte zerstreuen. Man wende gegen dieses Beispiel nicht ein, daß es eigentlich aus zwei verschiedenen Folgen besteht, die rein äußerlich zu einer

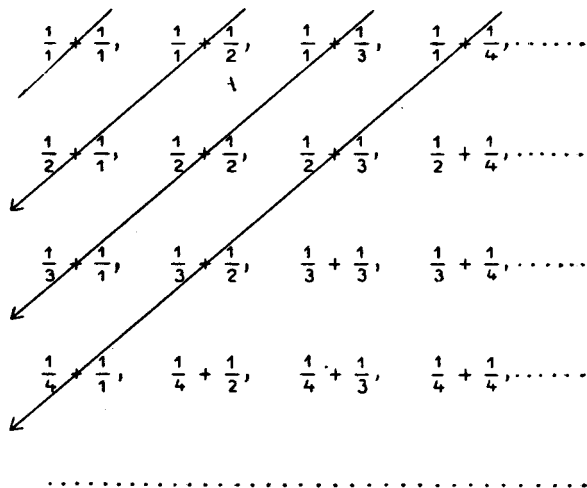
¹⁾ Er stammt von G. Kowalewski.

Folge zusammengestüekelt sind. Denn erstens haben wir ein klares Gesetz für die Bildung dieser Folge angegeben; und zweitens kann man das Bildungsgesetz sogar durch eine einheitliche Formel ausdrücken, nämlich durch

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right) (-1)^n$$

Wir sehen aus diesem Beispiel, daß ein Häufungspunkt, auch wenn er in der Einzahl auftritt, noch nicht Limes zu sein braucht. Wenn wir verlangen, daß eine Folge einen Limes besitzen soll, so fordern wir mehr, als wenn wir nur verlangen, daß sie einen Häufungspunkt aufweise.

Wir wollen nun ein Beispiel einer Folge kennen lernen, die unendlich viele Häufungspunkte besitzt. Zu dem Zweck betrachten wir die Gesamtheit der Zahlen von der Form $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ und ordnen sie in Gestalt folgenden Tableaus an:



Figur 12.

Die erste Zeile entsteht, wenn wir $m = 1$ setzen und n die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen lassen; die zweite Zeile, indem wir $m = 2$ setzen und mit n ebenso verfahren; und so fort. Es ist klar, daß unser Schema jeden Bruch von der Form $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ enthalten wird; z. B. den Bruch $\frac{1}{25} + \frac{1}{39}$ in der 25. Zeile an der 39. Stelle. Wir wollen nun diese unendlich vielen Folgen zu einer einzigen verschmelzen, indem wir ihre Glieder in der durch Pfeile angedeuteten Weise durchlaufen. Wir erhalten dann eine Folge, die jeden Bruch von der verlangten Form aufweist, und zwar jeden zweimal, nämlich als $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ und als $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$; will man die Wiederholung vermeiden, so braucht

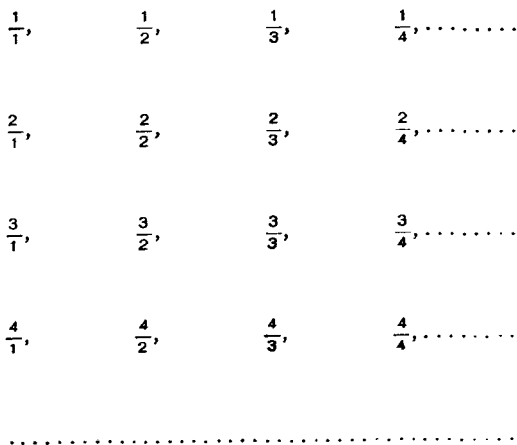
man nur die Brüche, die schon einmal dagewesen sind, zu streichen. Die so gewonnene Folge besitzt unendlich viele Häufungspunkte. Die Zahlen der ersten Zeile konvergieren nämlich gegen 1, die Zahlen der 2. Folge gegen $\frac{1}{2}$, die Zahlen der dritten gegen $\frac{1}{3}$ usw. und 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... werden somit die Häufungspunkte der gesamten Folge sein. Folgendes Bild mag eine Vorstellung von dem Aussehen dieser Folge geben:



Figur 13.

Das Bild zeigt, wie sich die Häufungspunkte immer dichter gegen 0 zusammendrängen: 0 selbst ein Häufungspunkt von Häufungspunkten.

Man kann sogar Folgen konstruieren von der paradoxen Eigenschaft, daß j e d e r ihrer Punkte Häufungspunkt ist. Die Gesamtheit der rationalen Zahlen bietet ein Beispiel dafür. Um sie in eine Folge zu ordnen, denken wir uns zuerst alle Brüche mit dem Zähler 1 angeschrieben, dann alle Brüche mit dem Zähler 2, hierauf alle mit dem Zähler 3 usf. Die positiven darunter lassen sich dann in Gestalt des nachfolgenden zweidimensionalen Schemas anschreiben:



Figur 14.

Ordnet man die Brüche, indem man sie etwa nach aufeinanderfolgenden Querlinien anreißt (wie in Figur 12), so erhält man eine Folge, die so beginnt:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$$

Dabei wird allerdings ein und derselbe Bruch noch mehrmals vorkommen, wie z. B. $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$. Läßt man jetzt noch alle Brüche, die schon einmal dagewesen

sind, weg, so erhält man eine Anordnung, die jeden Bruch nur einmal aufweist und die schließlich zu jedem Bruch vordringt. Damit ist die Menge der positiven rationalen Zahlen in eine Folge geordnet; freilich um den Preis, daß die natürliche Anordnung der Brüche nach ihrer Größe gründlich zerstört ist. Will man jetzt alle Brüche haben, so braucht man nur hinter jedem Bruch der Folge den negativen Bruch einzufügen und vor das erste Glied 0 zu setzen. In dieser Folge ist jede rationale Zahl Häufungspunkt, so daß die Folge nur aus Häufungspunkten besteht. Häufungspunkte sind aber auch die irrationalen Zahlen (die in jeder Umgebung unendlich viele rationale Zahlen enthalten), so daß die Folge mehr Häufungspunkte als Glieder besitzt. --

Nachdem wir uns so eine erste Orientierung verschafft haben, können wir zu der Frage zurückkehren, welche Summe die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

besitzt. Wir erwähnten schon, daß der Begriff der Summe in der Arithmetik nur für endlich viele Zahlen erklärt ist. Wünscht man von der Summe einer unendlichen Reihe zu sprechen, so muß man den Ausdruck „Summe“ von neuem definieren. Wie sollen wir das tun? Am natürlichsten erscheint folgender Vorschlag: Statt alle Glieder einer vorgelegten unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

zu addieren, was wir nicht können, wollen wir zunächst nur die ersten zwei Glieder, dann die ersten drei Glieder usw. in Summe ziehen. Die so erhaltenen Teilsummen

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

usw.

bilden eine Folge $s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$, und wir sehen nun zu, ob diese Folge einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Wenn ja, dann wollen wir ihn die Summe der unendlichen Reihe nennen. Mit anderen Worten: die Summe s der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ist definiert durch den Ausdruck

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Es ist wohl zu beachten, daß s nicht eine Summe im bisherigen Sinn des Wortes ist, sondern der Grenzwert einer Folge von Summen. Es ist daher von vornherein nicht zu erwarten, daß sich alle Eigenschaften endlicher Summen unterschiedslos bei den unendlichen Gebilden wiederfinden. Eine endliche Reihe von Zahlen besitzt immer eine Summe; von unendlichen Reihen gilt das keineswegs, da die Folge der s_n nicht zu konvergieren braucht. Gerade die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ist ein Beispiel dafür. Bildet

man nämlich die Folge der Teilsummen, so sind diese abwechselnd 0 und 1, die Folge der Zahlen

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

strebt keiner festen Grenze zu, und wir haben daher zu sagen, daß unsere Reihe keine Summe besitzt.

Wir dürfen aber nie vergessen, daß dieses Resultat von unserer Definition der Summe abhängt, also von einem willkürlichen Faktor. Eine unendliche Reihe besitzt von Natur aus keine Summe; sondern sie erhält eine solche erst, wenn wir ihr durch ein Verfahren eine solche zuordnen. Nun könnte man den Begriff der Summe auch anders fassen und dann könnte es geschehen, daß sich unsere Reihe als summierbar erweise; ein solcher Vorschlag wäre z. B. der: da die Teilsummen unserer Reihe zwischen 0 und 1 hin- und herpendeln, so liegt der Gedanke nahe, ihre arithmetischen Mittel

$$S_1 = \frac{s_1}{1}, S_2 = \frac{s_1 + s_2}{2}, S_3 = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}, \dots$$

zu bilden, in der Erwartung, daß diese einem Grenzwert zustreben. Ist dies der Fall, dann wollen wir diesen Grenzwert die Summe der unendlichen Reihe nennen. Tatsächlich liefert dieses Verfahren die Folge

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \dots$$

die sich ersichtlich dem Grenzwert $\frac{1}{2}$ nähert. Durch die neue Summen- definition können wir also der Behauptung von Grandi und Leibniz einen klaren Sinn verleihen; freilich einen Sinn, der jenen Männern noch unbekannt war.

Wenn wir diese Definition akzeptieren, dann läßt sich folgendes beweisen: Jede im bisherigen Sinn konvergente Reihe ist auch konvergent im neuen Sinn und liefert dieselbe Summe. Andererseits können sich Reihen, die im alten Sinn divergent waren, als konvergent (summierbar) im neuen Sinn erweisen, so daß die summenbildende Kraft des neuen Verfahrens größer ist als die des alten. Man kennt heute eine ganze Anzahl von Verfahren, divergente Reihen zu summieren, Verfahren, die sich zum Teil in eine Skala ordnen lassen von der Art, daß jedes folgende Verfahren ein größeres Wirkungsfeld hat, mehr Reihen zu summieren gestattet, als das vorhergehende. Geregelt wird die Bildung dieser Verfahren wieder durch die Forderung der Permanenz: eine im Sinn des Verfahrens V_k summierbare Reihe soll auch im Sinn des Verfahrens V_{k-1} summierbar sein und denselben Summenwert ergeben. Solche Betrachtungen lehren eindringlich, daß es wirklich nur von der Definition abhängt, ob eine unendliche Reihe eine Summe besitzt oder nicht.

11. Das Rechnen mit Folgen. Der Differentialquotient.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es möglich ist, mit unendlichen Folgen zu rechnen. Daß diese Möglichkeit besteht, mag das Beispiel der Addition dartun. Kennt man zwei Folgen

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots \end{array}$$

welche gegen die Grenzwerte a resp. b konvergieren, so liegt es nahe, unter ihrer Summe die Folge

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$$

zu verstehen. Diese ist tatsächlich wieder konvergent und hat $a + b$ zum Grenzwert. Bevor wir den strengen Beweis dafür erbringen, wollen wir uns das Gesagte an einem Beispiel plausibel machen. Nehmen wir an, daß die erste Folge gegen 1, die zweite gegen 2 konvergiert; das heißt, daß sich die Glieder der ersten Folge nach einiger Zeit nur unmerklich wenig von 1, die Glieder der zweiten unmerklich wenig von 2 unterscheiden; dann wird aber die Summe zweier solcher Glieder nur ganz wenig von 3 abweichen, und eben dies war der Inhalt der Behauptung.

Der strenge Beweis benutzt die Beziehung

$$|a + b| \leq |a| + |b|;$$

haben nämlich a und b das gleiche Vorzeichen, dann ist

$$|a + b| = |a| + |b|;$$

ist aber z. B. a positiv und b negativ, dann ist

$$|a + b| < |a| + |b|.$$

Im allgemeinen kann man daher nicht mehr aussagen, als daß der absolute Betrag einer Summe kleiner oder höchstens gleich ist der Summe der absoluten Beträge.

Indem wir uns nun dem Beweis selbst zuwenden, haben wir nur unser anschauliches Raisonement von vorhin in eine strenge Form zu bringen. Die Folgen (a_n) und (b_n) sollen gegen a , resp. b konvergieren; das heißt:

$$|a - a_n| < \varepsilon, \text{ für } n > N_1$$

$$|b - b_n| < \varepsilon, \text{ für } n > N_2.$$

Die Zahlen N_1 und N_2 werden dabei im allgemeinen verschieden sein, da sie ja ganz von dem Tempo abhängen, mit dem die Folgen gegen ihre Limiten

streben. (Wenn die erste Folge rasch konvergiert, werden schon wenig Glieder genügen, um die Annäherung bis unter ε zu fördern; konvergiert die zweite langsam, so sind weit mehr Glieder nötig, um dasselbe zu erreichen.) Bezeichnet N die größere der beiden Zahlen N_1 und N_2 , dann gilt auf jeden Fall

$$\begin{aligned} |a - a_n| &< \varepsilon, \text{ wofern nur } n > N \\ |b - b_n| &< \varepsilon, \text{ wofern nur } n > N \end{aligned}$$

Vom N -ten Glied ab wird also jede der beiden Folgen um weniger als ε von ihrem Grenzwert abweichen. Wenn nun die Folge $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$ konvergieren soll, so muß der Ausdruck

$$|(a + b) - (a_n + b_n)|$$

mit wachsendem n beliebig klein werden. Nun ist

$$|(a + b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)|$$

und dieser Ausdruck ist auf Grund unserer Vorbemerkung

$$\begin{aligned} &\leq |a - a_n| + |b - b_n| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

wird also tatsächlich beliebig klein, wofern nur n genügend groß gewählt wird.

Den eben bewiesenen Satz könnte man auch in folgender Form aussprechen: Der Grenzwert einer Summe zweier Folgen ist gleich der Summe der Grenzwerte der Folgen; in Zeichen:

$$(1) \quad \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

In Analogie dazu lassen sich nun drei weitere Formeln aufstellen:

$$(2) \quad \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$$

$$(3) \quad \lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

$$(4) \quad \lim (a_n : b_n) = \lim a_n : \lim b_n.$$

Die letzte Formel gilt nur mit der Einschränkung, daß $\lim b_n$ von 0 verschieden ist (und das entspricht genau dem Satz, daß man durch 0 nicht dividieren darf). Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division führen also aus dem Bereich der konvergenten Folgen nicht hinaus. Oder die konvergenten Folgen bilden einen Körper.

Man kann unsere vier Formeln unter einen etwas allgemeineren Gesichtspunkt fassen, wenn man sich entschließt, den Übergang zur Grenze als eine neue Operation anzusehen, als Limesoperation, die jetzt neben die vier Grundspezies der Arithmetik tritt. Unsere vier Formeln lassen sich dann in dem einen Satz zusammenfassen: Die Limesoperation ist mit den vier Grundoperationen der Arithmetik vertauschbar. Daß wir hier von einer Operation sprechen, wird auf den ersten Blick befremden, wird aber durch folgende Überlegung verständlich: Wie die Addition ein Ver-

fahren ist, das von einer Reihe vorgelegter Zahlen, den Summanden, zu einer neuen Zahl, der Summe führt, genau so stellt der Grenzübergang ein Verfahren dar, das von den unendlich vielen Zahlen einer Folge zu einer neuen Zahl, dem Limes führt. Das Wort „Operation“ betont diese Analogie. Die Frage, ob der Grenzübergang „wirklich“ eine Operation sei, ist müßig, da wir dem Begriff „Operation“ keine scharfe Grenze gezogen haben; das Wort wird eben nach Analogie vergeben.

Die Analogie mit den Operationen der Arithmetik läßt sich noch ein Stück weiter verfolgen. Man kann ja allerlei über eine Division erfahren — z. B. ob sie dasselbe Ergebnis hat wie eine andere —, ohne sie wirklich ausführen zu müssen. So kann man es auch zwei Folgen ansehen, ob sie demselben Limes zustreben, ohne daß man es nötig hätte, diesen Limes zu kennen. Die Durchführung dieser Gedanken setzt aber einige Begriffe voraus, denen wir uns jetzt zuwenden wollen. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, wird eine „Nullfolge“ genannt. Das Kriterium für eine Nullfolge ist, daß

$$|a_n| < \epsilon, \text{ wenn nur } n > N \text{ ist,}$$

d. h. daß die Glieder unbeschränkt abnehmen. Eine konvergente Folge, die keine Nullfolge ist, wird entweder einen positiven oder einen negativen Grenzwert haben. Im ersten Fall drängen sich ihre Glieder um einen Punkt auf der positiven Zahlenlinie zusammen. Wenn wir uns nun irgendwo zwischen diesem Limes und 0 einen Punkt c markieren, so werden fast alle Glieder der Folge rechts von c liegen. Eine Folge ist somit positiv, wenn sich eine positive Zahl c angeben läßt, die von fast allen Gliedern der Folge übertroffen wird. Die Folge ist negativ, wenn eine negative Zahl $-c$ existiert, die von fast allen Gliedern der Folge untertroffen wird.

Mit Hilfe dieser Begriffe können wir jetzt folgende drei Sätze formulieren:

1. Die Folge (a_n) liefert einen größeren Limes als die Folge (b_n) , wenn die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ positiv ist.

2. Die Folge (a_n) liefert einen kleineren Limes als die Folge (b_n) , wenn die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ negativ ist.

3. Die Folge (a_n) liefert denselben Limes wie die Folge (b_n) , wenn die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ eine Nullfolge ist.

Es mag genügen, auf den Beweis des ersten Satzes einzugehen. Ist die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ positiv, so heißt das, daß $\lim (a_n - b_n) > 0$ ist; nach Formel (2) heißt das aber genau so viel wie: $\lim a_n - \lim b_n > 0$, d. h. $\lim a_n > \lim b_n$.

Ein Vorzug dieser Formulierungen liegt darin, daß es oft viel leichter ist, etwas über das Verhalten der Differenzenfolge als über die Grenzwerte selbst zu erfahren. Hauptsächlich aber führen wir diese Sätze deshalb an, weil sie uns später, beim strengen Aufbau der reellen Zahlen, als Muster dienen sollen: da werden wir einen Kalkül mit Folgen aufbauen und die

Definitionen für „größer“, „gleich“, „kleiner“, „Summe“, „Differenz“ usw. den eben bewiesenen Sätzen nachbilden.

Wir haben gesagt, daß man durch eine Nullfolge nicht dividieren darf und zwar darum nicht, weil dann eine Folge entstehen kann, die nicht mehr konvergiert. Nun hindert nichts, den Begriff der Konvergenz weiter zu fassen, so daß auch solche Folgen konvergent heißen. Ja, eine solche Erweiterung drängt sich uns geradezu auf, sobald wir an die Darstellung der Zahlen auf der Kreislinie denken¹⁾. Bilden wir etwa die Folge

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

auf den Kreis ab, so rücken die Bildpunkte immer dichter an N heran: in jeder noch so kleinen Umgebung, die man um N schlägt, sind fast alle Glieder der Folge gelegen. Der Punkt N ist daher der Grenzwert der Folge, und wir haben — indem wir diese Sprechweise auf die Zahlengerade übertragen — von der ursprünglichen Folge zu sagen, sie strebe gegen den „uneigentlichen“ Grenzwert ∞ . Nach Hinzunahme der Zahl ∞ muß man also auch die unbegrenzt wachsenden Folgen zu den konvergenten rechnen. Dann können wir aber für Folgen, die nicht Nullfolgen sind, das Verbot der Division durch eine Nullfolge zurückziehen. Will man z. B. die Folge

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots$$

durch die Nullfolge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

dividieren, so ergibt sich die Folge

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots,$$

die in der neuen Ausdrucksweise gegen ∞ konvergiert.

Etwas mehr Sorgfalt müssen wir jetzt auf die Frage verwenden, was sich ereignet, wenn wir den Quotienten zweier Nullfolgen bilden. Hier sind verschiedene Fälle möglich:

1. Die Folge der Quotienten besitzt einen endlichen Grenzwert. Das zeigen etwa die beiden Folgen

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

die, durcheinander dividiert, die Folge

$$2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2n}{2n-1}, \dots$$

ergeben, die sich ersichtlich dem Grenzwert 1 nähert.

¹⁾ Vgl. Fig. 7, S. 36.

2. Lauten die Folgen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots$$
$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \frac{1}{n^2}, \dots,$$

so ergibt die Division der zweiten Folge durch die erste

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots$$

und die Division der ersten durch die zweite

$$1, 2, 3, 4, \dots n, \dots$$

Man sieht hieraus: Der Quotient zweier Nullfolgen kann auch 0 oder ∞ sein; in älteren Büchern findet sich wohl die Formulierung, daß die beiden Folgen unendlich klein werden, daß aber das Unendlich-Kleine der einen Folge von höherer Ordnung sei als das der andern. Das heißt natürlich nur, daß die Glieder der einen Folge in einem viel rascheren Tempo gegen 0 streben, so daß sie im Verhältnis zu denen der ersten selbst beliebig klein werden.

3. Es kann ein Fall eintreten, der von allen bisher betrachteten grundverschieden ist: daß die durch Division erhaltene Folge gar keinem Grenzwert zustrebt (sondern nur Häufungspunkte besitzt). Ein Beispiel dafür wären die Folgen

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{7}, \frac{1}{49}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \dots$$
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \dots$$

Wird die zweite Folge durch die erste dividiert, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{6}, \frac{5}{8}, \frac{25}{10}, \frac{7}{12}, \frac{49}{14}, \frac{9}{16}, \frac{81}{18}, \dots,$$

d. h.
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 2\frac{1}{2}, \frac{7}{12}, 3\frac{1}{2}, \frac{9}{16}, 4\frac{1}{2}, \dots$$

Diese Reihe zeigt folgendes Gesetz: Die ungeraden Glieder wachsen immer um 1, bilden also eine unbegrenzt aufsteigende Folge, die geraden Glieder aber nähern sich absteigend immer mehr $\frac{1}{2}$. Die Folge hat demnach die beiden Häufungspunkte 0 und ∞ .

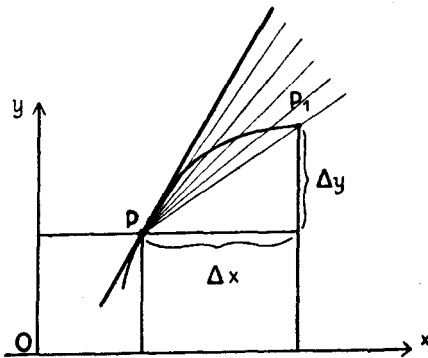
Über den Quotienten zweier Nullfolgen kann man also im allgemeinen nichts Bestimmtes aussagen. Er kann 0 sein oder ∞ oder irgend eine andere Zahl. Er braucht überhaupt nicht zu existieren, wenn die durch Division entstandene Folge divergiert. Welcher dieser Fälle eintritt, kann nur eine besondere Untersuchung lehren.

Diese Überlegungen über Nullfolgen sind von außerordentlicher Bedeutung, da auf ihnen die Erklärung eines Begriffes beruht, der in der **Mathematik** fast zwei Jahrhunderte in Dunkel getaucht war: ich meine den Begriff des Differentialquotienten. Das Problem, das zur Entstehung der Differentialrechnung geführt hat, ist das Tangentenproblem. Wie man

eine Tangente an den Kreis zieht, ist dem Leser zweifellos bekannt. Versucht er, diese Konstruktion auf eine Ellipse zu übertragen, so wird er merken, daß sie versagt. Die griechischen Geometer hatten für diesen Fall ein eigenes Verfahren erdacht, das jedoch schon bei der Parabel, der nächstverwandten Kurve, versagt; und die Konstruktion der Parabeltangente läßt sich wieder nicht auf die Hyperbel übertragen; kurzum, man mußte für jede Kurve eine besondere Konstruktion ersinnen, die nur gerade auf diese Kurve und auf keine andere anwendbar ist. Das war vielleicht unbequem, konnte aber hingehen, solange man nur einige wenige Kurven kannte. Die Situation änderte sich aber mit einem Schlage, als durch die Erfindung des Descartes, die Koordinatengeometrie, eine unabsehbare Menge von Kurven in den Gesichtskreis der Mathematiker trat. Es entstand das Problem, eine universelle Methode zu entwickeln, mit der man den Verlauf der Tangente für jede beliebige Kurve studieren könnte. Dieses Problem, das Descartes der Nachwelt vererbt hatte, wurde eine Generation später gelöst, und zwar ungefähr gleichzeitig von Newton und Leibniz. Die Lösung dieses Problems ist das, was man heute Differentialrechnung nennt.

Wir wollen uns jetzt mit der Idee des Leibniz an Hand eines Beispiels bekannt machen. Um die Tangente im Punkt P zu erhalten, schlagen wir einen Umweg ein: wir denken uns zunächst eine Sekante gezogen, indem wir P mit irgend einem anderen, auf der Kurve gelegenen Punkte P_1 verbinden. Lassen wir nun P fest, P_1 aber immer näher und näher längs der Kurve an P heranrücken, so wird sich die Sekante langsam um P drehen und einer festen Grenzlage zustreben. Diese Grenzlage ist die Tangente.

So einfach und selbstverständlich dieser Gedanke erscheint, so bedeutete er doch eine gewisse Revolution. Bis Leibniz bestand in der Mathematik eine tiefe Kluft zwischen Sekante und Tangente; für die Kreissekanten gelten z. B. ganz andere Sätze als für die Kreistangenten, und keinem Geometer wäre es in den Sinn gekommen, für diese beiden Arten von Linien gemeinsame Sätze aufzustellen. Es scheint, daß Leibniz durch seine philosophischen Gedanken über einen stetigen Zusammenhang alles Seins, seine *loi de continuité* zu der Anschauung angeregt wurde, die Tangente als



Figur 15.

Grenzfall unter die Sekanten aufzunehmen. Jedesfalls bedeutete diese Art des Sehens die Geburtsstunde der Differentialrechnung.

Will man den Grenzübergang rechnerisch verfolgen, so wird man zunächst das der Kurve zugrundeliegende Gesetz durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten

$$y = f(x)$$

ausdrücken. Der Punkt P habe die Koordinaten (x, y) ; gehe ich von P zu P_1 über, so muß ich die Abszisse von x um einen bestimmten Betrag vermehren, sagen wir um Δx ; dann erfährt auch die Ordinate einen Zuwachs Δy , der offenbar gleich ist dem Überschuß der neuen Ordinate über die alte, d. h. gleich ist $f(x + \Delta x) - f(x)$. Das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

gibt uns nun ein Maß für die mittlere Steigung der Kurve zwischen den Punkten P und P_1 . Wenn wir uns die Zeichnung etwa als die (übertriebene) Ansicht einer Bergstraße denken, so ist die Steigung in der Gegend von P groß und nimmt von da allmählich ab. Verbindet man Anfangs- und Endpunkte durch eine Gerade, so wird diese die mittlere Steigung der Straße darstellen.

Was wir suchen, ist aber nicht die mittlere Steigung, sondern die momentane Steigung der Kurve in P. Um dieses Ziel zu erreichen, werden wir das Intervall, innerhalb dessen sich unsere Rechnung bewegt, auf einen immer engeren Raum zusammenschrumpfen lassen, d. h. wir werden das Δx fortgesetzt verkleinern und so den Punkt P_1 zwingen, mehr und mehr an den Punkt P heranzugehen. Wenn wir das präzise ausdrücken wollen, so werden wir sagen: Durchläuft Δx eine Nullfolge, dann wird wegen des stetigen Zusammenhanges der Kurve auch Δy eine Nullfolge durchlaufen und wir betrachten nun das Schicksal, das der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dabei erfährt. Wir glauben in der Anschauung unmittelbar zu sehen, daß dieser Quotient einem Grenzwert zustreben muß, und dieser Grenzwert wird eben das Maß für die gesuchte momentane Steigung der Kurve im Punkt P sein. Wir schreiben, um das auszudrücken

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ nennt man Differentialquotient, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Differenzenquotient.

Hierbei müssen wir aber von allem Anfang an eine Vorstellung fernhalten, die den Begründern der Differentialrechnung vorgeschwebt und einen Schatten auf ihre Schöpfung geworfen hat, die Vorstellung nämlich, als ob der Differentialquotient ein Quotient zweier unendlich kleiner Größen wäre. Demgegenüber muß mit klaren Worten gesagt werden, daß der Differentialquotient überhaupt kein Quotient ist, sondern der Grenzwert einer Folge von Quotienten.

Das war aber den Begründern der Differentialrechnung noch nicht klar, wiewohl sie gelegentlich der Wahrheit ganz nahe kamen. Im großen ganzen bildeten sie sich die Auffassung, der Differentialquotient sei das Verhältnis der Größen Δx , Δy in dem Augenblick, da sie gerade entschwinden — die „ultima ratio evanescentium incrementorum“, wie Newton sagte. Leibniz und Newton fühlten wohl, daß in dieser Begriffsbildung eine Schwierigkeit wohnt, konnten sich aber darüber nicht recht ins Klare kommen. Und die Nachfolger, nicht kritisch, mehr auf die Eroberung neuer Gebiete als auf die Klärung der Begriffe bedacht — *allez en avant, et la fois vous viendra!* soll d'Alembert gesagt haben — glaubten vollends hier mit unendlich kleinen Größen zu rechnen, die, zwischen 0 und den eigentlichen Zahlen liegend, ein geheimnisvolles Zwischenreich bilden sollten.

Der Leser wird mit einigem Erstaunen fragen: Wie kommt es denn, daß so bedeutende Mathematiker den Sachverhalt nicht längst durchschaut haben? Das Verwirrende ist, daß der Differentialquotient, obwohl kein Quotient, sich in vielen Dingen so verhält, als ob er ein Quotient wäre. Zum Beispiel: Wenn y von x abhängt, dann hängt auch x von y ab. Die Differentialrechnung lehrt nun, daß der Differentialquotient dieser letzteren Funktion $\frac{dx}{dy}$ der reziproke Wert von $\frac{dy}{dx}$ ist, d. h. daß $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ ist, ganz so, als ob es sich um gewöhnliche Brüche handelte. Oder: Ist y eine Funktion von u und u eine Funktion von x , dann ist durch Vermittlung von u auch y eine Funktion von x . Es gilt nun das Gesetz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Sieht man diese Formel an, so ist man versucht, zu sagen: Das ist selbstverständlich, das du fällt ja heraus. (Das ist indes eine Täuschung: Das dy und das dx haben für sich allein überhaupt keine Bedeutung, sondern ausschließlich in der Verbindung $\frac{dy}{dx}$. Dieses Symbol hat nur als Ganzes Sinn, d. h. die Gesetze des Rechnens handeln von einem unzerlegbaren Symbol, das nur in der Form eines Quotienten geschrieben wird.) Kurzum, es ist, als ob sich der Differentialquotient vorgenommen hätte, den Mathematikern einen Streich zu spielen, indem er sich ganz wie ein wirklicher Quotient gebärdet.

Im Begriffe des Differentialquotienten ist noch eine Schwierigkeit enthalten, die wir zur Sprache bringen müssen. Nach unserer Darstellung ist der Differentialquotient der Limes, dem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zustrebt, wenn man Δx eine Nullfolge durchlaufen läßt. Aber hier fragt es sich: Welche Nullfolge? Es gibt ja unendlich viele Folgen, die gegen Null konvergieren. Gefordert ist nun, daß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für jede beliebige Nullfolge konvergiere und daß alle so erhaltenen Grenzwerte übereinstimmen. Mit anderen Worten, wir fordern

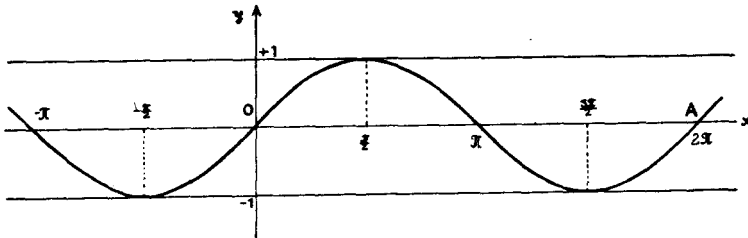
vom Differentialquotient, daß sein Wert feststehe, unabhängig von der besonderen Art, wie wir Δx gegen Null rücken lassen. Erwägt man das, so sieht man, daß es eigentlich gar nicht so selbstverständlich ist, daß ein Differentialquotient von diesen Eigenschaften existiert. Ja wie will man überhaupt kontrollieren, ob bei allen möglichen Grenzübergängen dasselbe Resultat herauskommt? Die letzte Frage ist zum Glück leichter zu beantworten als es scheint; denn bei den meisten Funktionen, mit denen man es in der Praxis zu tun hat, geht schon aus dem Gang der Rechnung hervor, daß das Resultat unabhängig ist von der besonderen Wahl der Nullfolge. Manchmal aber kann der Differentialquotient wirklich von der Art des Grenzüberganges abhängen, und diesen Fällen wollen wir uns jetzt zuwenden.

12. Merkwürdige Kurven.

Wir betreten damit ein Gebiet, das für den Erkenntnistheoretiker und den Psychologen von gleichem Interesse ist; wir werden nämlich Kurven kennen lernen, die ein so paradoxes Verhalten zeigen, daß sie sich der gewöhnlichen Anschauung entziehen.

Wir beginnen mit einem Fall, der noch ganz unproblematisch ist: wir denken uns eine Kurve, die stetig verläuft und die irgendwo eine Ecke hat. Fragt man, welche Richtung die Kurve in dem Eckpunkt hat, so muß man sagen: sie hat zwei Richtungen, je nachdem ob man sich von der Ecke nach links oder nach rechts bewegt. Will man diese Verhältnisse mit Hilfe der Rechnung verfolgen, so wird man auf zwei verschiedene Ansätze geführt, je nachdem ob man Δx durch positive oder durch negative Werte hindurch nach Null gehen läßt. Man spricht in diesem Falle von einem „vorwärts“, resp. „rückwärts genommenen Differentialquotienten“.

Von diesem Falle gehen wir zu einem anderen über, der schon mehr Interesse bietet. Der Leser hat gewiß schon etwas von Wellenlinien gehört, wie sie etwa eine schwingende Stimmgabel auf eine beruhte Trommel aufzeichnet. Der Mathematiker pflegt von einer Sinuslinie zu reden, da der Repräsentant dieser Klasse von Linien die Kurve $y = \sin x$ ist. x bedeutet

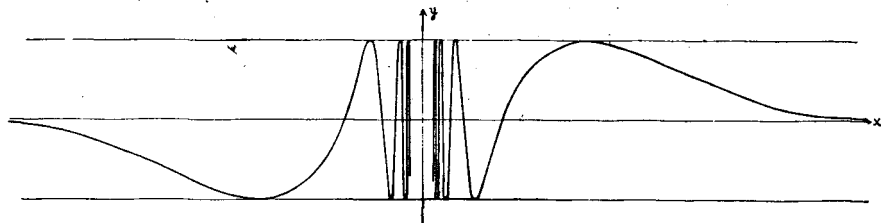


Figur 16.

einen Winkel, nur wird dieser nicht in Graden, Minuten und Sekunden gemessen, sondern im Bogenmaß: als Maß eines Winkels dient uns die Länge des zugehörigen Kreisbogens, gemessen in einem Kreis mit dem Radius 1. Ein Winkel von 360° wird also jetzt durch 2π dargestellt, ein solcher von 180° durch π , von 90° durch $\frac{\pi}{2}$ usw. Der Leser ersieht aus der Figur, daß die Kurve $y = \sin x$ den Wellenzug OA enthält und daß die ganze Kurve entsteht, wenn man dieses Wellenstück unendlich oft aneinanderreicht. Den höchsten Wert $+1$

nimmt die Kurve unendlich viele Male an, nämlich in den Punkten $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi$ usw. Den Wert -1 hat die Kurve in allen Punkten von der Form $x = \frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi$ und die x-Achse wird von ihr in den Punkten $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ durchsetzt.

Die Kurve, auf die es uns ankommt, ist aber nicht die Sinuslinie, sondern die Kurve $y = \sin \frac{1}{x}$; da der Sinus zwischen den Werten $+1$ und -1 liegt, muß die Bildkurve ganz in dem Flächenstreifen verlaufen, der die x-Achse beiderseits im Abstand 1 begleitet. Den höchsten Wert 1 erreicht die Funktion allemal dann, wenn $\frac{1}{x}$ entweder $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{5\pi}{2}$ oder $\frac{9\pi}{2}$... ist, d. h., wenn $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \dots$ ist. In allen diesen Punkten wird die Kurve die Form eines Wellenberges annehmen und diese Punkte drängen sich immer dichter gegen 0 heran. Ein Wellental stellt sie in den Punkten $x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \dots$ dar. Für größere Werte von x ist $\frac{1}{x}$ sehr klein und $\sin \frac{1}{x}$ fast gleich 0, d. h. die Kurve schmiegt sich weit draußen an die Abszissenachse an. Daraus ergibt sich folgendes Aussehen¹⁾:



Figur 17.

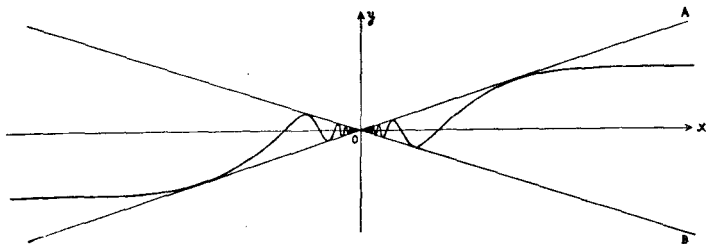
Die Kurve besteht aus unendlich vielen Wellenzügen, die sich gegen den Ursprung zu immer dichter aneinanderdrängen und sichtlich immer steiler werden. An der Stelle $x = 0$ selbst ist die Funktion nicht definiert; man kann ihr dort willkürlich irgendeinen Wert vorschreiben, z. B. 0 oder $\frac{1}{2}$ oder sonst eine Zahl. Kann man sich nun von dem Verlauf der Kurve eine klare Vorstellung machen? Was man anschaulich auffaßt, das sind wohl die einzelnen Wellenzüge, vielleicht auch die Intention des Sichzusammendrängens gegen den Ursprung hin. Aber im Ursprung selbst scheint uns die Vorstellungskraft im Stiche zu lassen, und der Verfasser dieses Buches müßte, falls er in eine Diskussion verwickelt würde, mit Berkeley bekennen: „Falls irgend jemand

¹⁾ Die Kurve ist in der Figur in die Länge gezogen.

die Fähigkeit besitzt, in seinem Geiste eine solche Vorstellung zu bilden, so ist es vergeblich, sie ihm abdisputieren zu wollen; ich unternehme das nicht. Mein Wunsch geht nur dahin, der Leser möge sich vollständig und mit Gewißheit überzeugen, ob er im Besitz einer solchen Vorstellung sei oder nicht.“

Stellt nun die Kurve im Ursprung eine stetig zusammenhängende Linie dar? Fragen wir zunächst, worin das Wesen des stetigen Zusammenhanges besteht. Wenn der Leser sich ein Stück Kurve aufzeichnet, so wird er folgendes bemerken: Wenn er einen Punkt mit den Koordinaten x, y herausgreift und das x nur sehr wenig ändert, so wird sich auch das y nur unbedeutend ändern. Schärfer formuliert: Eine Kurve ist stetig dann, wenn genügend kleinen Änderungen von x beliebige kleine Änderungen von y entsprechen. Wendet der Leser diese Überlegung auf die Kurve $y = \sin \frac{1}{x}$ an, und zwar auf den Ursprung, so merkt er sogleich das Unstetigwerden: Ein so schmales Intervall er auch von 0 aus abgrenzt (sagen wir von 0 bis ϵ), stets wird die Kurve zwischen $+1$ und -1 oszillieren, — er kann es durch Verkleinerung des Intervalles auf der x -Achse nicht erzwingen, daß die Schwankung der Funktion z. B. unter den Betrag $\frac{1}{10}$ hinabsinkt.

Nun modifizieren wir das Beispiel, indem wir die Funktion $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ betrachten. Das Dazutreten des Faktors x bewirkt es, daß die Amplituden der Schwingungen selbst sich mit x ändern, also groß sind, wenn x groß ist, und klein sind, wenn x klein ist. Die Folge ist, daß die Wellenzüge sich zwar gegen 0 unendlich dicht zusammendrängen, aber gleichzeitig an Höhe verlieren, so daß sie gewissermaßen ersterben, wie eine unendlich feine Kräuselung am Strand. Die ganze Kurve ist jetzt zwischen den beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$ eingeschlossen und zeigt folgendes Aussehen¹⁾:



Figur 18.

Diese Kurve ist im Ursprung stetig. Denn einer kleinen Änderung von x entspricht jetzt auch eine kleine Änderung von y . Welche Richtung hat nun die Kurve an der Stelle $x = 0$? Unter der Richtung verstehen wir

¹⁾ Vgl. die vorige Fußnote.

ja die Grenzlage, der die Sekante zustrebt, wenn der Punkt P festgehalten wird, während P_1 längs der Kurve näher und näher an P heranrückt. Denken wir uns nun einen Punkt, der sich längs der Wellenkurve gegen 0 herabewegt, dann wird er unendlich oft ganz hinauf und unendlich oft ganz hinunter kommen (auf OA, resp. OB liegen) und die Folge davon wird sein, daß der Sekantenstrahl unaufhörlich in dem Winkelraum A O B hin- und herschwankt, ohne sich für eine bestimmte Grenzlage zu entschließen. Der einzige Schluß, der sich hieraus ergibt, ist der, daß die Kurve im Punkt 0 keine Tangente besitzt, daß sie richtungslos ist, obwohl sie vollkommen stetig verläuft.

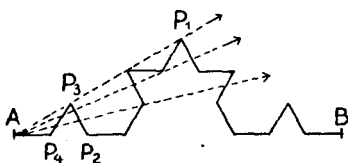
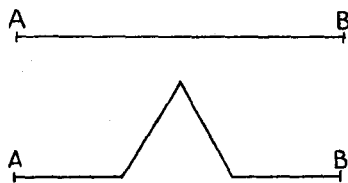
An diesem Beispiel kann man in der Tat studieren, daß der Wert des Differentialquotienten ganz davon abhängt, wie man Δx gegen 0 gehen läßt. Läßt man Δx z. B. die Folge $\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \frac{2}{13\pi}, \dots$ durchlaufen, so werden alle Differenzenquotienten 1 und daher auch der Differentialquotient 1 sein. Läßt man Δx die Folge $\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \frac{2}{15\pi}, \dots$ durchlaufen, so werden die Differenzenquotienten -1 und der Differentialquotient -1 sein; läßt man Δx die Folge $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}, \dots$ durchlaufen, so werden alle Differenzenquotienten 0 und auch der Differentialquotient 0 sein. Durch geeignete Wahl der Nullfolge hat man es ganz in der Hand, dem Differentialquotienten jeden beliebigen Wert zwischen $+1$ und -1 zu verleihen.

Man war geneigt, das für eine Ausnahmserscheinung zu halten, die höchstens an einzelnen Punkten eintreten kann. Da überraschte Weierstraß die mathematische Welt mit der Entdeckung, daß es Kurven gibt, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind, die also in jedem Punkt das Verhalten unserer Kurve im Ursprung zeigen. Solche Kurven entsprechen offenbar nicht mehr dem Bild, das uns bei diesem Wort vorschwebt.

Die Idee von Weierstraß beruht ungefähr darauf, einer Wellenlinie eine feinere zu überlagern, dieser eine noch feinere usw. ad infinitum, so daß schließlich eine Kurve entsteht, die nirgends „glatt“ verläuft, sondern bis ins Unendliche gekräuselt und gefältelt ist, ähnlich wie die Kurve $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$. Die Entwicklungen von Weierstraß darzulegen wäre zu beschwerlich. Aber zum Glück sind wir heute in der Lage, mit viel einfacheren Mitteln Kurven herzustellen, welche das von Weierstraß entdeckte Verhalten zeigen. Ein sehr einfaches Beispiel stammt von H. v. Koch:

Wir gehen von der Einheitsstrecke aus und tilgen das mittlere Drittel mit Ausschluß der Endpunkte, die stehen bleiben. Die Lücke ersetzen wir durch eine Zacke, indem wir über dem getilgten Drittel die beiden Seiten eines gleichseitigen Dreieckes konstruieren. Mit jedem der stehengebliebenen

Streckenzüge verfahren wir ebenso: wir tilgen wieder das mittlere Drittel und ersetzen es durch eine entsprechend kleinere Zacke. Die nebenstehende



Figur 19.

Figur zeigt die ersten Stadien dieser Konstruktion. Unbegrenzt fortgesetzt, liefert dieses Verfahren eine Kurve, die stetig und nirgends differenzierbar ist.

Daß die Kurve stetig ist, liegt daran, daß die aufgesetzten Zacken mehr und mehr an Größe abnehmen. Daß sie nicht differenzierbar ist, wollen wir uns zunächst für die Stelle A klar machen. Wenn wir die Bahn eines Punktes verfolgen, der sich etwa längs des zuletzt gezeichneten Näherungspolygons auf A zubewegt, so wird er manchmal eine Spitze erklimmen (in P_1 und P_3), manchmal bis zur x-Achse hinabtauchen (in P_2 und P_4). Nun muß sich der

Leser vorstellen, daß die Situation, die er in der Figur im Großen sieht, bei Fortsetzung des Verfahrens in jedem Stückchen wiederkehrt, so daß an die Stelle jeder noch so kleinen Strecke wieder ein ähnliches, entsprechend verkleinertes Abbild der ganzen Figur tritt. Bewegt sich also der Punkt längs der Kochschen Kurve gegen A, so wird der von A ausgehende Sekantenstrahl unendlich oft auf- und niederschwanken, zwischen 30° und 0° hin- und herspielen, ohne sich auf eine bestimmte Grenzlage einzustellen. Vielleicht hat der Leser den Eindruck: Aber in der unmittelbaren Umgebung von A muß doch die Kurve ein kleines Stück horizontal verlaufen! Das ist eine Täuschung; denn über jeder noch so kleinen Strecke, die mit A beginnt, erhebt sich wieder das Zackenmuster der ganzen Figur, d. h. in jeder noch so engen Umgebung von A liegen Kurvenpunkte, die in einem Winkelsektor von 30° verteilt sind. Und ganz analoge Betrachtungen lassen sich für jeden andern Kurvenpunkt anstellen.

Daß solche Verhältnisse möglich sind, war der früheren Mathematik entgangen. Man nahm da ohne weiteres an, daß eine stetige Funktion auch differenzierbar sei¹⁾. Die Weierstraßsche Entdeckung bedeutete darum eine schwere Erschütterung des naiven Vertrauens in die Anschauung. Diese Erschütterung regte zu der allgemeinen Frage an: Was ist eigentlich eine Kurve? Diese Frage gehört zu denen, die leichter aufzuwerfen als zu be-

¹⁾ Es herrschte damals in der Mathematik, wie F. Klein sagte, noch der „paradiesische“ Zustand, indem man gut und böse, differenzierbar und nichtdifferenzierbar bei einer stetigen Funktion nicht unterschied.

antworten sind. Wir wollen versuchen, dem Leser einen Einblick in die Schwierigkeiten zu geben, auf welche eine präzise Definition stößt.

Um das Jahr 1880 hat C. Jordan eine Definition aufgestellt, die ungefähr das wiedergibt, was uns anschaulich vorschwebt. Diese Definition besagt im Grunde folgendes: Eine Kurve ist das, was ein Punkt bei stetiger Bewegung durchläuft. Die Bewegung eines Punktes beherrschen wir, wenn wir von jedem Zeitaugenblick angeben können, wo sich der Punkt befindet, wenn wir also den Ort als Funktion der Zeit kennen. Wenn sich der Punkt in einer Ebene bewegt, ist der Ort durch zwei Zahlen x , y bestimmt, die Zeit durch eine Zahl t . Die Bewegung wird also vollständig beschrieben sein, wenn ich angebe, wie x und y von t abhängen, d. h. wenn ich x und y als Funktionen von t gebe

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t).\end{aligned}$$

Dabei sollen die Funktionen φ und ψ eindeutig sein, d. h. in jedem Moment soll Abszisse und Ordinate der Lage des Teilchens eindeutig feststehen. Von einer stetigen Bewegung sprechen wir dann, wenn die Funktionen φ und ψ stetig sind, also das bewegte Teilchen in hinreichend benachbarten Momenten beliebig benachbarte Raumstellen einnimmt, womit also plötzliche Sprünge (Verschwinden an einer Stelle und Wiederauftauchen an einer anderen) ausgeschlossen sind. Nehmen wir an, daß die Bewegung in der Zeiteinheit (sagen wir in einer Minute) vor sich gehe, dann können wir t auf das Intervall von 0 bis 1 beschränken. Die Definition Jordans läuft dann auf folgendes hinaus: Eine Kurve ist ein stetiges und eindeutiges Abbild der Einheitsstrecke. Dagegen müssen wir uns damit abfinden, daß dann ein Kreis z. B. nicht mehr zu den Kurven gehört, weil er in sich zurückläuft, während die Einheitsstrecke zwei Enden hat. Sehen wir von dem letzten Umstand ab, so scheint diese Definition genau das zu treffen, was uns bei dem Wort „Kurve“ vorschwebt. Umso merkwürdiger ist die Entdeckung Peanos aus dem Jahre 1890, daß es Gebilde gibt, die eindeutige und stetige Bilder der Einheitsstrecke sind, die also Kurven darstellen im Sinne Jordans, die aber im strengen Sinn des Wortes ein ganzes Quadrat erfüllen. Wollte man so eine Kurve zeichnen, so müßte man eine ganze Quadratfläche schwarz anfärben — das wäre das Bild der Kurve.

Wir wollen nun eine Darstellung dieser merkwürdigen Kurve geben und zwar in einer vereinfachten Form, die von Hilbert herrührt. Das Problem, das sich Peano und Hilbert gesetzt hatten, war folgendes: Gegeben sind die Einheitsstrecke und das Einheitsquadrat. Wie kann man diese beiden Gebilde so aufeinander beziehen, daß jedem Punkt der Einheitsstrecke genau ein Punkt des Quadrates entspricht und daß die Abbildung stetig ist? An-

schaulich gesprochen: Denken wir uns einen Reisenden, der in einer Minute alle Punkte eines Quadrates passieren soll. Wie wird seine Reiseroute aussehen?

Wir teilen die Minute in vier gleiche Teile und ebenso das Quadrat und richten es nun so ein, daß der Reisende in einer Viertelminute immer gerade ein Viertel des Quadrates bereist. In der ersten Viertelminute soll er das erste Quadratviertel durchwandern, ohne es später wieder zu berühren, in der zweiten Viertelminute das zweite Quadratviertel usw. Der Leser wird sagen, daß die Aufgabe dadurch um nichts leichter geworden ist: denn wie soll es der Reisende anfangen, in einer bestimmten Zeit eine ganze Fläche zu durchfahren? Stehen wir nicht vor genau derselben Schwierigkeit wie zu Anfang? Nein! Man könnte dem folgenden Verfahren das Motto vorsetzen: „Du kannst im Großen nichts verrichten und fängst es nun im Kleinen an“. Wir setzen den Teilungsprozeß fort, wir teilen also jedes Viertel der Quadratfläche wieder in vier gleiche Teile, die ganze Quadratfläche also in 16 kleine Quadrate, die wir mit den Zahlen 1, 2, ... 16 numerieren. Ganz entsprechend teilen wir auch die Minute in 16 gleiche Intervalle, die ebenfalls die Nummern 1 bis 16 erhalten und ordnen nun jeder Teilstrecke das Teilquadrat mit der gleichen Nummer zu. Dabei müssen wir nur darauf achten, daß zwei Quadrate mit aufeinanderfolgenden Nummern eine Seite gemein haben. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens läßt sich die Teilung des Quadrates und der Strecke beliebig verfeinern. Beim Übergang zur Grenze verschwindet nun der Unterschied der Dimension: als Limes ergibt sich ein Punkt, gleichviel, ob wir von der Teilung einer Strecke oder von der Teilung einer Fläche ausgegangen sind.

Das ermöglicht es uns, Strecke und Quadrat in der gewünschten Weise aufeinander abzubilden. Zu dem Zweck haben wir dreierlei nachzuweisen: 1. Jedem Punkt der Einheitsstrecke entspricht ein Punkt des Quadrats (d. h. in jedem Augenblick befindet sich der Reisende an genau einer Stelle der Fläche). 2. Kein Punkt des Quadrates geht leer aus (der Reisende kommt überall hin). 3. Die Abbildung ist stetig (er bewegt sich in einer zusammenhängenden Linie).

ad 1. Wenn wir irgend einen Punkt t auf der Einheitsstrecke herausgreifen, so können bei fortgesetzter Teilung nur zwei Fälle passieren:

a) Fällt der Punkt t immer in das Innere einer Teilstrecke (z. B. $t = \frac{1}{3}$), so denken wir uns die aufeinanderfolgenden Intervalle markiert, in welche t bei den sukzessiven Teilungsschritten fällt. Diese werden immer kürzer und ziehen sich auf den Punkt t zusammen. Jedem solchen Intervall entspricht auf Grund unseres Verfahrens ein Teilquadrat, und diese Teilquadrate bilden eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Parzellen, die dank unserer Teilungs-

vorschrift ineinander geschachtelt sind und sich auf einen bestimmten Punkt q zusammenziehen; dem Punkt t ist dann der Punkt q zugeordnet.

b) Fällt aber t nach einigen Schritten mit einem Teilpunkt zusammen (z. B. $t = \frac{3}{16}$), dann vereinigen wir die beiden in t aneinanderstoßenden Teilintervalle und verfahren wie vorhin; der einzige Unterschied ist der, daß den Doppelintervallen Doppelquadrate entsprechen, die natürlich wieder gegen einen bestimmten Punkt q konvergieren. Auf jeden Fall entspricht einem Punkt der Einheitsstrecke ein und nur ein Punkt im Quadrat.

ad 2. Wir wollen jetzt irgend einen Punkt aus der Quadratformfläche herausgreifen und weisen nach, daß ihm mindestens ein Punkt der Einheitsstrecke entspricht. Damit wird gezeigt sein, daß unsere Abbildung keinen Quadratpunkt ausläßt. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

a) Der Punkt q liegt, soweit man auch die Teilung fortsetzen mag, stets im Innern eines Teilquadrates. q bestimmt dann eine Folge ineinandergeschachtelter Quadrate und dieser entspricht eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle, die sich auf einen bestimmten Punkt t zusammenziehen.

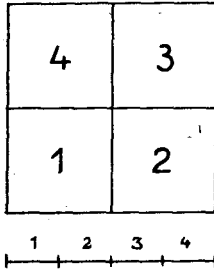
b) Fällt aber q auf den Rand oder gar in die Ecke eines Quadrates, wo zwei oder mehr Quadrate mit nicht benachbarten Nummern zusammenstoßen, dann können wir gegen diesen Punkt von verschiedenen Seiten her vordringen. Wenn sich der Leser etwa die Skizze eines Quadrates anfertigt, das in 16 Teile geteilt ist, wie in Abbildung b), S. 127, dann wird er bemerken, daß im Mittelpunkt drei Quadrate mit nicht benachbarten Nummern zusammenstoßen. Man kann daher von drei verschiedenen Seiten her konvergente Prozesse anlaufen lassen, die alle gegen einen und denselben Punkt tendieren. Ihnen entsprechen offenbar drei ganz getrennte Intervallschachtelungen auf der Einheitsstrecke, welche da drei Punkte t_1, t_2, t_3 festlegen.

In umgekehrter Richtung ist also die Zuordnung nicht eindeutig; in dem eben erwähnten Fall gibt es drei verschiedene Augenblicke, da der Reisende an dieselbe Stelle des Quadrates gelangt; das heißt aber, daß sich die Bahnkurve überschneidet.

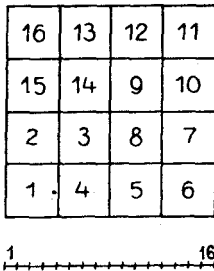
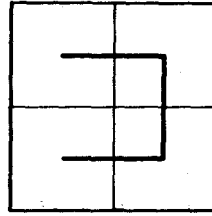
ad 3. Die Bahnlinie reißt nirgends ab. Das ergibt sich eigentlich ganz von selbst, sobald man sich nur die Art der Abbildung etwas genauer überlegt. Ein Abreißen der Bahnkurve könnte ja nur so zustande kommen, daß der Punkt springt, d. h. daß er sich in knapp aufeinanderfolgenden Zeiten an ganz verschiedenen Stellen der Fläche befindet. Das ist aber unmöglich. Der Leser stelle sich einmal zwei Punkte auf der Zeitlinie vor, die ganz nahe benachbart sind. Wenn er sich die Einheitsstrecke in eine entsprechend große Zahl von Intervallen geteilt denkt, so werden diese zwei Punkte in das-

selbe Intervall oder in zwei anstoßende fallen. Dasselbe wird aber dann von ihren Bildern im Quadrat gelten: auch diese werden in dasselbe kleine Teilquadrat oder in zwei angrenzende fallen. Je näher die Punkte auf der Zeitlinie liegen, desto mehr werden auch ihre Bilder im Quadrat zusammenrücken. Nachbarschaft in der Zeit wird also abgebildet in Nachbarschaft im Raum.

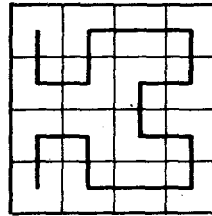
Durchläuft t die Einheitsstrecke, so beschreibt der Bildpunkt q einen stetigen, das ganze Quadrat erfüllenden Linienzug. Zur Veranschaulichung dieser Peanokurve mögen nachstehende Näherungspolygone dienen:



a



b



Figur 20.

Die Polygone geben an, in welcher Reihenfolge die einzelnen Teilquadrate von der Kurve durchlaufen werden. Wir haben uns vorzustellen, daß jede geradlinige Strecke bei dem nächsten Näherungsschritt durch einen gebrochenen Linienzug ersetzt wird. Die Peanokurve selbst ist das unendlich ferne Grenzgebilde, dem sich die einzelnen Mäanderzüge nähern.

Ist diese Kurve differenzierbar? Unter der Tangente wollten wir ja die Grenzlage der Sekanten verstehen. Denken wir uns nun auf der Quadratfläche einen Punkt P markiert und mit einem anderen Punkt P_1 verbunden. Was geschieht, wenn P_1 längs der Kurve gegen P heranrückt? Wir können das dadurch bewirken, daß wir mit t_1 immer näher an t herangehen; wenn sich t_1 nach t bewegt, also ein Intervall durchfährt, wird der zugehörige Bildpunkt ein ganzes Flächenstück durchlaufen. Verbinde ich also P mit P_1 ,

so wird der Sekantenstrahl hin- und herschwanken, ohne sich auf eine Grenzlage einzustellen. Ja er wird, wenn man die Umgebung von t passend wählt, in alle Richtungen der Windrose weisen.

Diese Entdeckung hat wohl etwas Paradoxes, und sie wird bisweilen in einem Ton vorgetragen, als ob wir die Anschauung auf einem Irrtum ertappt hätten. Man hat in diesem Sinn wohl von einer Krise der Anschauung gesprochen. Wir wollen daher noch einen Augenblick auf die Frage eingehen: Trügt die Anschauung, wenn sie zu lehren scheint, daß eine stetige, ohne Knick verlaufende Linie in jedem Punkt eine bestimmte Richtung besitzt? Ich glaube nicht, daß die vorstehenden Ausführungen zu diesem Schluß berechtigen. Das wird klarer, wenn wir uns überlegen, wie sich denn die Begriffe des Mathematikers zu den uns geläufigen anschaulichen Gebilden verhalten.

Was ist z. B. eine anschauliche Kurve? Eigentlich bezeichnet man mit diesem Wort dreierlei: einen Strich, dessen Breite gegenüber der Länge zurücktritt, dann die Grenze zwischen zwei Farbflächen und eine gewisse Art von Bewegungen („Kurven laufen“). Jedenfalls lernt man den Sinn dieses Wortes durch eine hinweisende Definition kennen, ebenso wie den der Worte „Strich“, „Draht“, „Faden“ usw. D. h., wir nennen „Kurve“ alles das, was einem Paradigma (etwa einer gezeichneten krummen Linie) einigermaßen ähnlich ist, ohne daß wir die Art der Ähnlichkeit präzisieren, und daher fehlt diesem Begriff die scharfe Grenze. D. h. es gibt Fälle, wo man schwanken wird, ob man etwas noch eine Kurve nennen soll oder nicht. Der Begriff ist ebenso diffus umgrenzt wie etwa die Begriffe „länglich“, „rundlich“, „gezackt“, „zerfranst“ usw. Bei der Anwendung dieser Worte stößt man auf gewisse Zonen der Unbestimmtheit, die wir als „schwebende Klassen“ bezeichnen können. Die Begriffe der Mathematik aber sind präzisiert.

Wie gelangen wir nun zu einer solchen präzisen Definition? Sehr klar wird dieser Vorgang in der folgenden Ausführung Mengers umschrieben („Dimensionstheorie“, S. 75 f.):

„Wenn ein Wort, mit dem man im täglichen Leben eine Vorstellung verbindet, in der Wissenschaft durch eine Definition präzisiert werden soll, so besteht kein Anlaß, sich mit dem täglichen Gebrauch des Wortes in Widerspruch zu setzen, d. h. Dinge, welche allgemein mit dem betreffenden Wort bezeichnet werden, aus dem Begriff auszuschließen, oder Dinge, welche allgemein von der Bezeichnung mit dem betreffenden Wort ausgeschlossen werden, in den Begriff aufzunehmen. Eine formale Forderung an die strenge Definition eines der täglichen Sprache entnommenen Wortes ist also, daß sie die Präzisierung und Ergänzung des in Grenzfällen

schwankenden und unvollständigen Wortgebrauchs darstellt, welche mit demselben nicht in Widerspruch tritt.

Eine derartige Ergänzung und Präzisierung kann nun aber in verschiedener Weise, und zwar nicht nur formal, sondern (mit Rücksicht auf die schwebenden Klassen) auch inhaltlich in verschiedener Weise erfolgen. Beispielsweise können gewisse verwickelte Gebilde, für welche der einzelne auf die Frage, ob sie eindimensional seien, keinen Bescheid weiß oder verschiedene Menschen verschiedene Antworten geben, sowohl zu den eindimensionalen Gebilden gerechnet als auch von ihnen ausgeschlossen werden, ohne daß die Definition deshalb in Widerspruch zum allgemeinen Sprachgebrauch tritt. Jede Festlegung auf eine bestimmte Präzisierung enthält also ein gewisses Maß von Willkür, deren Rechtfertigung ausschließlich durch die Fruchtbarkeit der Definition geliefert werden kann. Der Zweck des Wortes im täglichen Leben ist die Verständigung der Menschen untereinander; der Zweck einer strengen Definition ist es, den Ausgangspunkt eines deduktiven Systems zu bilden.“

Hält man sich das vor Augen, so wird man zu der Frage, ob uns die Anschauung trügt, wohl eine andere Stellung einnehmen. Der Mathematiker will ja gar nicht die in der Anschauung vorliegenden Verhältnisse beschreiben. Er verwendet ein Begriffssystem, das nur streckenweise mit der Anschauung parallel geht, sich aber dann wieder von ihr entfernt, so daß man sich nicht wundern kann, wenn Unstimmigkeiten entstehen. Aber dann ist es unbillig, dies der Anschauung zur Last zu legen, sondern man sollte sich eher bemühen, die anschaulichen Begriffe in ihrer Eigenart besser zu verstehen. (Vgl. dazu den Schluß des Kapitel 13.) —

Durch die Entdeckung Peanos scheint sich einer der fundamentalsten Unterschiede zu verwischen, der Unterschied zwischen den Dimensionen. Wenn eine Kurve eine Fläche erfüllen kann — wie soll man dann zwischen ein- und zweidimensional unterscheiden? Dies führt uns auf eine tiefer liegende Frage, die wir hier wenigstens andeutungsweise erörtern wollen.

Wir müssen uns zunächst mit einer merkwürdigen Entdeckung Cantors bekanntmachen, nämlich mit der Tatsache, daß sich eine Strecke eindeutig auf ein Quadrat abbilden läßt, daß man also aus einer Strecke durch bloße Umordnung ihrer Punkte eine Fläche machen kann. Um uns etwas präziser auszudrücken, nehmen wir die Einheitsstrecke und ein Quadrat von der Seitenlänge 1 her und zeigen nun, daß sich die beiden Gebilde eineindeutig aufeinander beziehen lassen, so daß jedem Punkt der Strecke genau ein Punkt des Quadrates und jedem Punkt des Quadrates genau ein Punkt der Strecke entspricht.

Um diesen Beweis zu erbringen, erinnern wir zunächst daran, daß sich alle reellen Zahlen in Form von Dezimalbrüchen schreiben lassen, und zwar

als unendliche Dezimalbrüche. So ist z. B. $\frac{1}{2} = 0.5 = 0.4999 \dots$. In dieser Form denken wir uns alle Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 dargestellt.

Ein Punkt des Quadrates bedarf zu seiner Bestimmung zweier Zahlangaben; am einfachsten verwenden wir seine Abstände von zwei anstoßenden Quadratseiten, die wir x und y nennen. Da der Punkt innerhalb oder am Rande des Quadrates liegt, werden die Zahlen x und y nur zwischen 0 und 1 liegen; wir können sie daher wieder als Dezimalbrüche, und zwar als nicht abbrechende Dezimalbrüche anschreiben. Einem jeden Quadratpunkt entspricht dann eindeutig ein gewisses Dezimalbruchpaar, und die Menge aller Quadratpunkte stellt sich dar als Menge aller möglichen Dezimalbruchpaare x, y .

Die verlangte Zuordnung wird nun darauf hinauskommen, einem jeden Dezimalbruch t ein gewisses Dezimalbruchpaar x, y zuzuweisen und umgekehrt. Das gelingt durch den einfachen Gedanken, einen gegebenen Dezimalbruch in zwei neue Dezimalbrüche zu „spalten“, aus denen sich rückwärts wieder der gegebene Dezimalbruch finden läßt. Um das näher auszuführen, nehmen wir an, es sei der Dezimalbruch

$$t = 0 \cdot a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

vorgelegt; wir bilden nun das einmal aus den ungeraden, das anderemal aus den geraden Stellen die Dezimalbrüche

$$x = 0 \cdot a_1 a_2 a_3 \dots, \quad y = 0 \cdot b_1 b_2 b_3 \dots$$

Damit ist gewissermaßen der Dezimalbruch t — oder vielmehr sein Ziffern-vorrat — in zwei neue Dezimalbrüche zerlegt, und diese Zerlegung ist nur auf eine Art möglich. Die Zahl $t = \frac{4}{11} = 0.363636 \dots$ führt z. B. zur Zerlegung $x = 0.333 \dots, y = 0.666 \dots$, d. h. der Zahl $t = \frac{4}{11}$ entspricht das Zahlenpaar $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$. Deuten wir nun x, y als einen Punkt der Quadratfläche, so ist durch diese Vorschrift jedem Punkt der Einheitsstrecke genau ein Punkt des Quadrates zugewiesen.

Umgekehrt gehört aber auch jedem Quadratpunkt ein Punkt der Einheitsstrecke zu. Greifen wir nämlich aus der Quadratfläche irgend einen Punkt heraus, so bestimmt er zunächst zwei Abstände x, y von den Seiten des Quadrates; diese Abstände liegen zwischen 0 und 1, wir können sie daher als Dezimalbrüche und zwar gleich als nicht-abbrechende Dezimalbrüche darstellen:

$$x = 0 \cdot a_1 a_2 a_3 \dots, \quad y = 0 \cdot b_1 b_2 b_3 \dots$$

Verschmelzen wir jetzt diese beiden Darstellungen, indem wir aus ihren Ziffern den neuen Dezimalbruch

$$0 \cdot a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

komponieren, dann ist das offenbar gerade derjenige Dezimalbruch, dessen

Zerlegung wieder auf x und y führt, d. h. es ist der Dezimalbruch t . Vermöge unseres Verfahrens ist also tatsächlich jedem Punkt der Einheitsstrecke ein Punkt des Quadrates zugewiesen und umgekehrt.

Gegen diese Überlegung läßt sich ein Einwand erheben, den wir uns an einem Beispiel vor Augen führen wollen: Welcher Quadratpunkt entspricht dem Punkt

$$t = 0 \cdot 33030303 \dots ?$$

Offenbar der Punkt

$$x = 0 \cdot 3000 \dots$$

$$y = 0 \cdot 3333 \dots$$

Aber nun erhebt sich die Schwierigkeit, daß eine Zahl von der Form x verboten ist. Schließen wir die abbrechenden Dezimalbrüche aus, so erhalten wir also nicht alle möglichen Werte von t ; wenn der eine Punkt das Quadrat durchfährt, so durchläuft der andere Punkt nicht die volle Einheitsstrecke. Diese Schwierigkeit läßt sich aber nach König beseitigen, wenn wir unter $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ nicht die Ziffern, sondern gewisse Ziffernkomplexe, gleichsam die „Moleküle“ des Dezimalbruches verstehen, indem wir immer eine von 0 verschiedene Ziffer des Dezimalbruches mit allen ihr etwa vorangehenden Nullen zusammenfassen. Gruppieren wir also die Ziffern von t in der nachstehenden Weise

$$t = 0 \cdot 3 \mid 3 \mid 03 \mid 03 \mid 03 \mid \dots$$

so erhalten wir durch Aufteilung

$$x = 0 \cdot 30303 \dots$$

$$y = 0 \cdot 30303 \dots$$

Jetzt kann jede Zahl t in der geschilderten Weise zerspalten werden, ohne daß abbrechende Dezimalbrüche entstehen, Strecke und Quadrat sind also eineindeutig aufeinander abgebildet.

Die Entdeckung von Cantor erscheint deshalb paradox, weil man bis dahin immer geglaubt hatte, eine Fläche müßte unendlich viel mehr Punkte enthalten als eine Gerade. Da der Leser sich mit dem Beweis vielleicht nicht abfinden und eher das Gefühl haben wird, daß in unserer Überlegung irgend ein Trick enthalten ist, den er nicht durchschaut — Schopenhauer hat dies Mißtrauen einmal ausgedrückt mit den Worten: „Daß alles so sei, muß man, durch den Satz vom Widerspruch gezwungen, zugeben: warum es aber so ist, erfährt man nicht. Man hat daher fast die unbehagliche Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich. Oft schließt ein apagogischer Beweis alle Türen, eine nach der andern, zu, und läßt nur die eine offen, in die man nun bloß deswegen hinein muß“ — so wollen wir noch ein paar Worte darüber sagen. Das Verblüffende besteht ja darin, daß uns der Beweis zeigt, daß man aus den

Punkten einer Strecke ein Quadrat machen kann, während doch die Punkte der Strecke nur einen unendlich kleinen Teil der Punkte des Quadrates bilden. Sollen wir einem Beweis trauen, der zu so abstrusen Konsequenzen führt?

Überlegen wir uns die Sache noch einmal! Es ist schon wahr, daß der Teil kleiner ist als das Ganze, so lange wir uns auf endliche Mengen beschränken. Ob aber der Satz auch noch für unendliche Mengen gilt, steht von vornherein gar nicht fest, weil wir hier auf ein ganz neues Gebiet übergegangen sind und ja noch gar nicht wissen, was wir unter „gleich“, „größer“, „kleiner“ zu verstehen haben. Man muß diese Begriffe vielmehr von neuem definieren, und tut man das, so zeigt es sich, daß hier für die Beziehung des Ganzen zum Teil nicht mehr die alten Gesetze aufrechterhalten werden können. Die unendlichen Mengen müssen sich eben irgendwie von den endlichen unterscheiden und schon darum darf man nicht erwarten, alle Eigenschaften der letzteren unterschiedslos bei der ersteren wiederzufinden. Überlegt man sich das, so verschwindet das Erstaunen darüber, daß der uralte Satz „Der Teil ist kleiner als das Ganze“ für unendliche Mengen nicht mehr gilt. Ja für die unendlichen Mengen ist es geradezu charakteristisch, daß sie diesen Satz verletzen. Dedekind kam so auf den geistvollen Gedanken, das Unendliche gerade durch diese seine paradoxe Eigenschaft zu definieren: ein System von Dingen ist unendlich, wenn es sich Glied für Glied auf einen Teil seiner selbst beziehen läßt. Man ermißt den Fortschritt dieser Definition: während alle früheren Erklärungen im Unendlichen immer nur etwas Negatives, das Nichtendliche erblickten, ist hier das Unendliche zum ersten Mal durch eine positive innere Eigenschaft charakterisiert.

Doch damit genug von den unendlichen Mengen! Fragen wir jetzt: Ist die von Cantor aufgefundene Abbildung stetig? Das werden wir sofort erkennen, wenn wir das Verhalten der Abbildung etwa an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ untersuchen. Schreibt man t in der Form

$$t = 0.49999 \dots,$$

so ergibt die früher beschriebene Zerlegung

$$x = 0.499 \dots$$

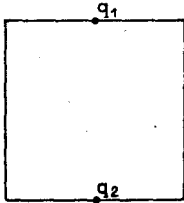
$$y = 0.999 \dots,$$

d. h. dem Punkt $t = \frac{1}{2}$ ist im Quadrat der Punkt q_1 mit den Koordinaten $(\frac{1}{2}, 1)$ zugeordnet. Was geschieht nun, wenn t nur ganz wenig über diesen Betrag hinauswächst? Setzen wir den Fall, t sei $0.50000111 \dots$; dann ist

$$x = 0.500111 \dots$$

$$y = 0.00111 \dots$$

Der Bildpunkt macht also, wenn t durch den kritischen Wert $\frac{1}{2}$ hindurchgeht, einen Sprung von dem oberen Quadratrand auf den unteren (in der Figur von q_1 nach q_2). Solche Sprünge finden sich überall, wo t ein Dezimalbruch ist, der in lauter Neunen ausläuft, also überall dort, wo t auch als abbrechender Dezimalbruch geschrieben werden kann, und diese Zahlen sind dicht gesät. Deutet man t als Zeit, so bewegt sich der Punkt q ganz und gar nicht stetig, sondern durchzuckt das Quadrat, wenn man sich so ausdrücken darf.



Figur 21.

Vergleichen wir nun die Abbildungen von Peano und Cantor! Die Abbildung von Peano ist

1. eindeutig in der Richtung von der Strecke auf das Quadrat (d. h. einem Punkt der Einheitsstrecke entspricht genau ein Punkt im Quadrat);

2. mehrdeutig in der Richtung vom Quadrat auf die Einheitsstrecke (d. h. einem Punkt des Quadrates entsprechen im allgemeinen verschiedene Punkte der Einheitsstrecke);

3. stetig.

Die Abbildung von Cantor ist

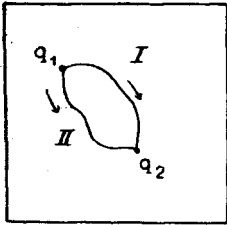
1. eindeutig in der Richtung von der Strecke auf das Quadrat,

2. eindeutig in der Richtung vom Quadrat auf die Strecke, also eindeutig, aber

3. unstetig.

Man sieht: ist die Abbildung stetig, so ist sie nicht eindeutig; ist sie eindeutig, so ist sie nicht stetig. Ist das vielleicht nur Zufall? Sollte es nicht gelingen, eine Abbildung zu ersinnen, die beide Vorzüge in sich vereinigt, die eineindeutig und stetig ist? Da ist nun das Merkwürdige, daß das durchaus nicht geht. Jürgens hat einen sehr einfachen Beweis dafür gefunden, den wir hier mitteilen wollen. Nehmen wir an, es gäbe eine Abbildung der Strecke auf das Quadrat, die eineindeutig und stetig ist; wir werden dann zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Greifen wir nämlich aus der Quadratfläche zwei Punkte q_1, q_2 heraus. Nach Voraussetzung entsprechen ihnen auf der Einheitsstrecke die Punkte t_1 und t_2 . Bewegt sich nun auf der Quadratfläche ein Punkt längs irgend eines Weges stetig von q_1 nach q_2 , z. B. längs des Weges I, so müßte nach Voraussetzung auch der zugehörige Punkt auf der Einheitsstrecke stetig von t_1 nach t_2 wandern, also das ganze Intervall zwischen diesen beiden Punkten durchlaufen. Wie nun, wenn der Quadratpunkt statt der Route, die er gewählt hat, irgendeine

andere eingeschlagen hätte, die ihn auch von q_1 nach q_2 führt, z. B. die Route II? Dann müßte der zugehörige Punkt ebenfalls das ganze Intervall von t_1 bis t_2 durchlaufen. Dieses Intervall würde also auf zwei verschiedene Linienstücke des Quadrates abgebildet, entgegen der Annahme, daß einem Punkt der Strecke nur ein Punkt im Quadrat entsprechen soll. Wollen wir also die Stetigkeit durchsetzen, so müssen wir die Eineindeutigkeit opfern.



Figur 22.

Als abschließendes Ergebnis dieser Forschungen kristallisierte sich der berühmte Satz von der Invarianz der Dimensionalzahl heraus, dessen erster Beweis von L. E. J. Brouwer (1911) stammt. Danach

kann man ein Stück eines k -dimensionalen Kontinuums eineindeutig und stetig wieder nur auf ein Stück eines k -dimensionalen Kontinuums abbilden, niemals auf ein Stück eines m -dimensionalen, wenn $m \neq k$.

Ausgegangen sind wir von der Frage: Wie soll man den Unterschied zwischen Kurve und Fläche begrifflich fassen? Die Antwort, welche noch Riemann und Helmholtz gegeben hatten: daß ein Punkt auf einer Kurve durch eine Koordinate, ein Punkt auf einer Fläche durch zwei Koordinaten charakterisiert ist — diese Antwort löst die Frage nicht vollständig. Denn heute muß man sagen, daß es willkürlich ist, wie viele Koordinaten man verwenden will. Will man die Punkte eines Quadrates nur voneinander unterscheiden, sie mit Eigennamen versehen, so kommt man mit einer einzigen reellen Koordinate aus. Was Riemann und Helmholtz vorschwebte, ist offenbar, daß die Verteilung der Zahlen über die Punkte stetig sein soll: dann braucht man für den Fall der Fläche in der Tat zwei Koordinaten, nicht mehr und nicht weniger.

Die Frage: „Was ist eine Kurve?“ hat aber damit noch keine Beantwortung gefunden. Denn wenn man z. B. sagen wollte, die Kurve sei eineindeutiges und stetiges Bild der Einheitsstrecke, so würde man die in sich zurücklaufenden, die sich überschneidenden und die sich verzweigenden Kurven ausschließen; aber auch Gebilde, wie das in Fig. 17 dargestellte, das doch jeder als linienhaft bezeichnen wird. Die Aufgabe, den Kurvenbegriff allgemein zu charakterisieren, wurde nach einer Vorgeschichte, die sich an Bolzano, Poincaré und Brouwer knüpft, definitiv von Menger und Urysohn gelöst. Mit wenigen Worten kann man die Lösung so andeuten: Das wesentlichste Merkmal der Kurve ist ihre Eindimensionalität. Diese Angabe erfordert die Erklärung des Begriffs der Dimensionszahl. Denken wir uns irgendein geometrisches Gebilde (eine Punktmenge M) in unserem euklidischen Raum. Dieses kann an verschiedenen Stellen eine verschiedene Dimensionszahl haben; z. B. wenn aus einem Körper Flächen hervorstechen

wie Blätter aus einem Stamm, von denen wieder Kurven ausgehen wie Stacheln. Wir wollen nun versuchen zu erklären, was es heißt, daß so ein Gebilde in einem bestimmten Punkt die Dimensionszahl 1, 2 oder 3 besitzt. Zu diesem Zweck stellt Menger¹⁾ folgendes Gedankenexperiment an: Wie kann man den Punkt mit seiner in M liegenden Umgebung aus dem übrigen Raum herauslösen? Liegt der Punkt im Inneren eines dreidimensionalen Gebildes (etwa eines Holzkörpers), so wird man mit einer Säge den übrigen Körper entfernen und zu diesem Zweck eine ganze Fläche durchsägen müssen; liegt er in einem zweidimensionalen Gebiet (etwa auf einer Blattfläche), so wird man mit einer Schere die Umgebung herauslösen, indem man eine Kurve durchschneidet; liegt er auf einem eindimensionalen Gebilde (einem dünnen Stachel), so braucht man den Stachel nur in zwei Punkten (oder jedenfalls in endlich vielen) zu durchzwicken. Das heißt aber: eine Menge ist in einem Punkt 3 dimensional, wenn es beliebig kleine Umgebungen dieses Punktes innerhalb der Menge gibt, deren Grenze 2 dimensional ist; eine Menge ist in einem Punkt 2 dimensional, wenn es beliebig kleine Umgebungen dieses Punktes innerhalb der Menge gibt, deren Grenze 1 dimensional ist; eine Menge ist in einem Punkt 1 dimensional, wenn es beliebig kleine Umgebungen dieses Punktes innerhalb der Menge gibt, deren Grenze 0 dimensional ist (in gewöhnlicher Ausdrucksweise: die aus einzelnen Punkten besteht); eine Menge ist in einem Punkt 0 dimensional, wenn es beliebig kleine Umgebungen dieses Punktes in der Menge gibt, deren Grenze (-1) dimensional ist; und (-1) dimensional soll nur die leere Menge sein, d. h. die Menge, die kein Element enthält. Man sieht, wie hier durch ein rekursives Verfahren die Dimensionszahl von einem absoluten Anfangspunkt aus — dem Begriff (-1) dimensional — definiert wird.

Diese Gedanken sind ein Beispiel für eine eigentümliche Klasse geometrischer Untersuchungen, bei denen es sich nicht um das Studium von Längen und Winkeln handelt, auch nicht um Tatsachen, die mit den Begriffen gerade oder krumm zusammenhängen, sondern allein um Eigenschaften, die bei stetigen und eindeutigen Transformationen erhalten bleiben. Der Leser denke sich eine Figur auf einer Gummifläche gezeichnet und nun die Fläche beliebig verzerrt, ohne daß sie zerreißt oder daß Neuberührungen auftreten. Alle Längen und Winkel werden sich dabei ändern, eine Gerade mag in eine noch so kritzelige Kurve verzerrt werden, und doch zeigt es sich, daß dabei ganz bestimmte andere Eigenschaften erhalten bleiben, z. B. die Dimensionszahl. Die Topologie studiert nun gerade diejenigen Eigenschaften eines Raumgebildes, die bei beliebigen Verzerrungen dieser Art invariant bleiben. Doch das leitet uns zu einem neuen Gedankengang hinüber.

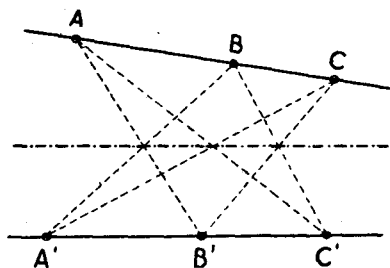
¹⁾ Dimensionstheorie, S. 78.

Anhang: Was ist Geometrie?

Wenn der Laie gefragt würde, was er unter Geometrie versteht, so wird er vielleicht etwas sagen wie: Die Wissenschaft von den Eigenschaften der Raumgebilde oder auch: von den geometrischen Eigenschaften. Aber wenn er nun aufgefordert würde, den Begriff der geometrischen Eigenschaft genauer zu umgrenzen, so wird er merken, daß seine Antwort noch nicht hinreichend ist, sondern daß eben hier ein neues Problem einsetzt: Ist jede räumliche Eigenschaft zugleich eine geometrische? Wir wollen sehen! Finde ich etwa beim Messen einer Strecke, daß sie $\frac{1}{2}$ m lang ist, so ist das gewiß eine Eigenschaft dieser Strecke; aber niemand wird das Aufsuchen solcher Eigenschaften der Geometrie zuschreiben. F. Klein hat diesen Punkt einmal sehr drastisch erläutert durch den Ausspruch eines Kollegen, der behauptet hatte: wenn man von einem Dreieck den Mittelpunkt des Inkreises und den Mittelpunkt des Umkreises markiert, so liegt der zweite immer 3 mm östlich vom ersten; er habe sich durch wiederholte Messungen davon überzeugt. Wenn ein solcher Satz wahr wäre, so würde er eine Tatsache der Topographie oder Geographie beschreiben. Ein Lehrsatz über das gleichseitige Dreieck dagegen ist ein Satz ganz anderer Art: er spricht eine Tatsache aus, die nicht nur dieses eine Mal, sondern allemal zutrifft, er ist richtig nicht nur für diese eine Figur, sondern für eine Klasse von Figuren. Fragt man, was denn den Figuren einer Klasse gemeinsam ist, so lautet die Antwort: ihre Ähnlichkeit. Wir sehen erstens ab von der Lage, welche die Figur im Raum einnimmt, und zweitens von ihrer Größe; d. h. wir fassen nur diejenigen Eigenschaften ins Auge, welche die Figur mit allen anderen der Klasse teilt. Was nicht allen Figuren einer Klasse zukommt, verdient nur ein individuelles Interesse und scheidet aus der Geometrie aus.

Was unter einer Klasse von Figuren zu verstehen ist, das hängt von uns ab, und in diesem Gedankengang kommt man leicht dazu, verschiedene „Geometrien“ zu unterscheiden, je nach der Klasseneinteilung, die man trifft. In unserem Beispiel entstehen alle Figuren einer Klasse, wenn man eine von ihnen herausgreift und sie zwei Arten von Umformungen unterwirft: einer Bewegung im Raum und einer Ähnlichkeitstransformation, d. h. einer Vergrößerung oder Verkleinerung bei Erhaltung der Form. (Bei räumlichen Gebilden tritt noch die Spiegelung hinzu, die z. B. einen rechten Handschuh in einen linken überführt.) Nun kann man aus einer Figur auf mancherlei andere Weise neue herleiten, z. B. durch Zentralprojektion. Photographieren

wir eine auf der Tafel gezeichnete Figur von der Seite, so erhalten wir verschiedene Bilder, die im allgemeinen nicht mehr ähnlich sind. Denken wir uns nun die Figur auf alle erdenkliche Weise projiziert, so entsteht eine neue Klasse von Figuren, umfangreicher als die frühere, und wir können nun zusehen, ob wir Eigenschaften finden, die allen Figuren einer solchen Klasse gemeinsam sind. Daß es tatsächlich solche Eigenschaften gibt, ist



Figur 23.

leicht zu sehen. Der Leser zeichne sich irgend zwei Gerade auf und wähle auf jeder drei Punkte, die der Reihe nach A, B, C , resp. A', B', C' heißen mögen. Verbindet er nun die Punkte kreuzweise miteinander (d. h. A mit B' , A' mit B ; A mit C' , A' mit C ; B mit C' , B' mit C), und markiert er die drei Schnittpunkte, so wird er finden, daß sie auf einer Geraden liegen. Diese Eigenschaft bleibt unzerstört, wenn man die ganze

Figur fotografiert. Bei der Formulierung dieses Satzes kommt es offenbar nicht auf die Längen oder die Winkel in der Figur an, sondern nur darauf, daß gewisse Punkte auf einer Geraden liegen. Mit der Untersuchung dieser Eigenschaften befaßt sich die „projektive Geometrie“. Auf diesem Standpunkt spricht der Satz von dem gleichseitigen Dreieck keine geometrische Eigenschaft mehr aus, ja es ist bei der projektiven Denkart gar nicht mehr möglich, das gleichseitige Dreieck vor den anderen Dreiecken auszuzeichnen. Die Eigenschaften, welche die projektive Geometrie an den Tag hebt, sind mit dem Raumgebilde inniger verknüpft und viel weniger leicht zerstörbar als die Eigenschaften, welche die gewöhnliche Geometrie behandelt.

Hätten wir statt des Photographierens das Umformen durch Parallelprojektion gewählt, so wären wir auf eine andere Geometrie gestoßen, die zwischen der gewöhnlichen und der projektiven eine Mittelstellung einnimmt: es ist dies die affine Geometrie. Der Leser denke sich im Raum zwei beliebige Ebenen. Auf die erste Ebene sei irgendeine Figur gezeichnet; welche Eigenschaften dieser Figur bleiben erhalten, wenn man sie durch Parallelstrahlen auf die zweite Ebene überträgt? Wenn die Figur ein Kreis ist, so wird sie in eine Ellipse übergehen. Kreis und Ellipse sind vom Standpunkt der affinen Geometrie nicht mehr zu unterscheiden. Die projektive Geometrie geht noch weiter, indem sie auch noch die Parabeln und Hyperbeln in dieselbe Klasse wirft, denn diese gehen durch Projektion auseinander hervor. Steigt man also von der gewöhnlichen oder der „metrischen“ Geometrie über die affine zur projektiven auf, so verschwinden mehr und mehr die Unter-

schiede der Figuren und statt dessen treten die tiefer liegenden, allgemeineren Wesenszüge hervor. Es ist, als ob man von einem Gegenstand immer weiter zurückträte: die Einzelheiten fließen zusammen und wir gewahren nur mehr die großen Linien.

Will man diesen Gedanken schärfer umreißen, so muß man den fundamentalen Begriff der Gruppe heranziehen. So nennt der Mathematiker gewisse Systeme von Operationen, die in sich geschlossen sind. Betrachten wir zur Erläuterung eine Kugel, der ein Tetraeder eingeschrieben ist und fassen wir diejenigen Kugeldrehungen ins Auge, die das Tetraeder in sich überführen. Der Leser wird leicht feststellen, daß es genau 12 solche Drehungen gibt. Führt man zwei solche Drehungen hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine Drehung derselben Art. Das Hintereinanderausführen zweier Drehungen wollen wir ihre Zusammensetzung nennen. Unsere 12 Drehungen haben nun die Eigenschaft, daß man durch Zusammensetzung immer wieder eine dieser Drehungen erhält, daß man also aus dem Kreis dieser 12 Operationen nicht heraustreten kann. Das ist die wichtigste Eigenschaft einer Gruppe. Bei den verschiedenartigsten Untersuchungen sind die Mathematiker auf solche merkwürdige Organismen gestoßen und haben allmählich ihre Eigenschaften herausgeschält. Die vollständige Definition lautet: Eine Gruppe ist ein System von Dingen — etwa Operationen — in endlicher oder unendlicher Anzahl, die folgenden fünf Forderungen genügen:

1. Es soll eine Vorschrift bestehen, nach der zwei Dinge zu einem zusammengesetzt werden können. Wir nennen die Dinge die Elemente und bezeichnen sie mit A, B usw., die Zusammensetzung nach Art der Multiplikation mit $A \cdot B$. Die erste Forderung besagt nun, daß die Zusammensetzung $A \cdot B$ eindeutig sein soll.

2. Das Element $A \cdot B$ soll wieder demselben System angehören: man soll also aus dem System nicht heraustreten können, wie immer man die Elemente zusammensetzt.

3. Die Zusammensetzung soll assoziativ sein, d. h. es soll $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ sein. Kommutativität wird dagegen nicht gefordert.

4. Es soll in unserem System ein bestimmtes Element E geben, das, mit jedem beliebigen anderen Element zusammengesetzt, dieses Element wiedergibt, für das also die Beziehung gilt: $A \cdot E = E \cdot A = A$. (Das Element E heißt „Einheitselement“, da es bei der Zusammensetzung der Elemente eine ähnliche Rolle spielt wie die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen.)

5. Zu jedem Element A soll es ein inverses Element \bar{A} geben, so daß

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A = E \text{ ist.}$$

Ein Beispiel einer Gruppe ist die Gesamtheit der Bewegungen im Raum; denn zwei Bewegungen setzen sich wieder zu einer Bewegung zusammen und jede Bewegung kann durch eine inverse rückgängig gemacht werden; das Einheitselement entspricht dabei der Ruhe als dem Grenzfall der Bewegung.

Kehren wir nun zur Betrachtung der verschiedenen Geometrien zurück, so finden wir, daß die räumlichen Transformationen, die eine bestimmte Klasse von Figuren erzeugen, gerade immer eine Gruppe bilden. So sind es die Bewegungen, die Ähnlichkeitstransformationen und der Prozeß der Spiegelung, welche die elementar-geometrischen Eigenschaften eines Raumgebildes ungeändert lassen. Diese Transformationen (sowie alle weiteren, die sich aus ihnen zusammensetzen) bilden eine Gruppe, die man als Hauptgruppe der räumlichen Transformationen bezeichnet. Man kann nun sagen: Die gewöhnliche Geometrie faßt solche Eigenschaften ins Auge, die invariant bleiben gegenüber allen Transformationen der Hauptgruppe. Damit hat das, was man sonst mehr gefühlsmäßig als „wesentliche“ Eigenschaft eines Raumgebildes ansieht, im Gegensatz zu einer „zufälligen“, eine exakte Formulierung erfahren.

Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere, so bleibt nur ein Teil der Eigenschaften invariant. Fügt man die Parallelprojektionen hinzu, so entsteht die affine Gruppe, nimmt man außerdem die Zentralprojektionen auf, so entsteht die projektive Gruppe, die in der affinen, resp. projektiven Geometrie ganz dieselbe Rolle spielt wie die Hauptgruppe in der „metrischen“ Geometrie. Je umfassender die Gruppe ist, die wir ansetzen, desto mehr dringen wir in die Tiefe. Die Eigenschaften, welche die metrische Geometrie erforscht, sind am leichtesten zerstörbar, sie liegen in der obersten Schicht. Die affinen Eigenschaften liegen schon tiefer, die projektiven noch tiefer. Bei dieser Auffassung erscheint die Gruppe als das Führende: Ein Typus geometrischen Forschens entsteht erst, wenn eine Mannigfaltigkeit und in ihr eine Gruppe von Transformationen gegeben ist. Wir können mit Felix Klein, der diese Gedanken zuerst in seinem „Erlanger Programm“ ausgeführt hat, sagen: Jede Geometrie ist Invariantentheorie bezüglich einer bestimmten Gruppe.

Hier eröffnet sich uns ein Ausblick auf eine unendliche Reihe von Geometrien, die sich ergeben, wenn man die Hauptgruppe nach verschiedenen Richtungen erweitert. So kann man von der metrischen Geometrie ausgehend, zur „Geometrie der reziproken Radien“ gelangen. Man faßt hier nur solche Eigenschaften einer Figur auf, die außer bei den Transformationen der Hauptgruppe auch noch bei der Spiegelung an einem festen Kreis (der Abbildung durch reziproke Radien) erhalten bleiben. Dabei zeigt es sich

z. B., daß Gerade und Kreise ineinander übergeführt werden, so daß man diese beiden Arten von Figuren in eine Klasse vereinigen muß.

Schließlich führen wir einen letzten Schritt aus und erheben uns zur Geometrie aller ein-eindeutigen und stetigen Punkttransformationen. Hier sucht man das Bleibende gegenüber beliebigen stetigen Verzerrungen. Von diesem Standpunkt aus sind z. B. eine Kugel, ein Würfel und eine Pyramide nicht wesentlich verschieden; jedes dieser Gebilde kann durch eine stetige Verzerrung in das andere übergeführt werden. Dagegen gehören z. B. eine Kugel und ein Torus (ein Pneumatikschlauch) ganz verschiedenen Körperklassen an: es ist offenbar unmöglich, das eine Gebilde stetig durch eine Reihe von Zwischenformen in das andere überzuführen. Die Eigenschaften, die jetzt zutage treten, bilden den Gegenstand der Topologie. Ein Lehrsatz der Topologie sagt z. B., daß Knoten weder im 2- noch im 4-dimensionalen Raum möglich sind, sondern nur im 3-dimensionalen. Ein anderes Beispiel einer topologischen Eigenschaft können wir uns an dem Möbius'schen Band klarmachen. Der Leser nehme einen Papierstreifen, biege seine beiden Enden zusammen, so daß ein geschlossener Ring entsteht, verdrehe aber vorher das eine Ende um 180° , so daß die Vorderseite des Streifens in die Rückseite übergeht — er erhält dann eine Fläche, welche nur eine Seite hat. Ein Wanderer, welcher sich auf dieser Fläche bewegt, würde nach einem Umlauf zwar an dieselbe Stelle zurückkommen, sich aber nun auf der entgegengesetzten Seite des Papierstreifens befinden, so daß eine Unterscheidung zweier Seiten der Fläche keinen Sinn mehr hat. Es ist klar, daß diese Eigenschaft gegenüber beliebigen stetigen Umformungen invariant bleibt und daß die Unterscheidung von einseitigen und zweiseitigen Flächen eine topologische Bedeutung hat. Um auch eine Fragestellung auf diesem Gebiet zu nennen, sei der „Vierfarbensatz“ zitiert: Die Geographen haben empirisch gefunden, daß, wie immer die politische Karte eines Erdteils aussieht, vier Farben zur Unterscheidung der verschiedenen Staaten genügen. Ein exakter Beweis für diesen Satz konnte bisher nicht erbracht werden.

Geht man noch weiter zu den allgemeinsten ein-eindeutigen Punkttransformationen, so hat man den Standpunkt der Mengenlehre erreicht. Von diesem Gesichtspunkt ist auch der Unterschied der Dimensionen verschwunden: eine Strecke, eine Fläche, ein Körper können Punkt für Punkt aufeinander abgebildet werden, sind also nur verschiedene Repräsentanten einer Klasse. Von der ganzen reichen Welt geometrischer Gestalten bleiben jetzt nur ganz wenige Züge übrig, so der Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Punktmengen.

Der Begriff der Dimension gehört dem Begriffssystem der Topologie an, und wir erkennen nun klarer, warum er bei den allgemeinsten, auf die

eindeutigen Transformationen gerichteten Untersuchungen Cantors keine Stelle hat.

In der Reihe der Geometrien steht also an dem einen Ende die metrische Geometrie (oder eigentlich die Topographie, die jedes räumliche Gebilde individuell auffaßt), am anderen Ende die Mengenlehre. Jeder anderen Geometrie kommt ein bestimmter Platz zwischen diesen Extremen zu.

13. Die reellen Zahlen.

Ab und zu erscheinen populäre Schriften, in denen die Frage aufgeworfen wird, ob denn die irrationalen Zahlen überhaupt existieren; sie sind ein Nachhall aus einer früheren Periode der Wissenschaft, in der die Natur dieser Zahlen noch in geheimnisvollem Dunkel lag. Und in der Tat kann man gut verstehen, was zu solchen Zweifeln Anlaß gibt. Überlegungen, wie die im vorigen Kapitel angestellten, sind nicht leicht zu verstehen. Wir sprachen dort z. B. von Intervallschachtelungen, die sich auf einen Punkt zusammenziehen. Diese Sprechweise stellt, genau genommen, eine starke Zumutung an unser Denken dar. Wenn ich aus einer Strecke eine andere herauschneide, aus dieser wieder eine usf., so erhalte ich doch immer wieder eine Strecke. Es ist durchaus nicht zu entdecken, wie aus der Strecke ein Punkt werden soll. Die Kluft zwischen beiden scheint immer die gleiche zu bleiben. „Groß oder klein“ sagt P. du Bois Reymond¹⁾, „bleibt die Strecke immer eine Strecke zwischen zwei rationalen Punkten. Lassen wir nun plötzlich ohne logische Begründung an die Stelle der Strecke ~~den~~ Punkt treten, so ist dies ein Akt, bei dem wir offenbar willkürlich eine neue Vorstellung einführen, sie unvermittelt auf die erste folgen lassen und genau das vorweg nehmen, was bewiesen werden sollte. Ein allmähliches Zusammenfallen zweier Punkte, wie man dieses Geschehen auch wohl bezeichnet findet, ist vollends Unsinn. Die Punkte sind entweder durch eine Strecke getrennt, oder es ist nur ein Punkt da, ein Mittelding gibt es nicht“.

Dies ist eine ernste Schwierigkeit. Der entscheidende Punkt liegt in der Frage: Läßt sich beweisen, daß sich eine Intervallschachtelung auf einen Punkt zusammenzieht? Oder ist sein Dasein eine bloße Hypothese? Wir werden indes in dieser Frage einen anderen Standpunkt beziehen. Wir werden nämlich lernen, diese Intervallschachtelungen selber als Zahlen aufzufassen. Aber um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir uns zuvor mit einer etwas bescheideneren Frage beschäftigen.

Wir hatten erklärt: Eine Folge $a_1, a_2, a_3 \dots a_n, \dots$ ist konvergent, wenn es eine Zahl a gibt, der sich die Glieder der Folge unbegrenzt nähern. Diese Definition ist zwar in Ordnung, doch leidet sie an einem Übelstand: sie setzt voraus, daß wir den Grenzwert kennen. Nun ist es oft viel schwieriger, den Grenzwert anzugeben, als das Verhalten der Folge zu prüfen.

¹⁾ Die allgemeine Funktionentheorie, 1882, S. 61.

Der Leser wird, wenn er sich das Bild der Folge 8 auf S. 103 vor Augen hält, sofort den Eindruck der Konvergenz haben, obwohl er vielleicht nicht imstande ist, den Grenzwert zu berechnen. Es ist daher wünschenswert, den Begriff der Konvergenz von dem des Grenzwertes loszulösen. Demgemäß stellen wir uns die Frage: Läßt sich der Begriff der Konvergenz so fassen, daß sich auf Grund des Verhaltens der Zahlenfolge allein entscheiden läßt, ob sie konvergiert?

Das ist in der Tat möglich. Nehmen wir an, die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ konvergiere gegen den (rationalen) Grenzwert a . Dann läßt sich ein Index N angeben, von dem ab

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ wenn } n > N.$$

Für jedes weiter draußen liegende Glied a_{n+p} gilt erst recht

$$|a - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ wenn } n > N.$$

Aus diesen beiden Beziehungen kann man nun eine neue herstellen, aus der die Zahl a herausfällt. Betrachten wir nämlich die Differenz $a_n - a_{n+p}$; diese Differenz wird nicht geändert, wenn wir a hinzufügen und wieder wegnehmen; es ist also

$$a_n - a_{n+p} = a_n - a + a - a_{n+p} = (a - a_{n+p}) - (a - a_n).$$

Bilden wir nun den absoluten Betrag dieses Ausdrucks und beherzigen wir die Bemerkung von S. 110, so ist

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+p}| &= |(a - a_{n+p}) - (a - a_n)| \\ &< |a - a_{n+p}| + |a - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folgen, die dieses Verhalten zeigen, wollen wir konvergent nennen. Die Definition lautet somit:

Die Folge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ heißt konvergent, wenn

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ wofern nur } n > N \text{ ist.}$$

Das ist ein immanentes Kriterium, d. h. ein Kriterium, das sich nur auf die Glieder der gegebenen Folge bezieht und nicht ein Hinausschreiten über den Vorrat dieser Glieder nötig macht. Anschaulich gesprochen besagt das Kriterium, daß sich die Glieder der Folge so zusammendrängen müssen, daß der Unterschied zwischen einem Glied und irgend einem späteren beliebig klein ausfällt, wofern nur das Glied genügend weit draußen liegt; oder noch einfacher: daß alle weit draußen liegenden Glieder sehr dicht beieinander liegen.

Wie der Leser weiß, gibt es Folgen, die konvergent sind, die aber einem irrationalen Grenzwert zustreben, z. B. die Folge, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Da wir aber bisher nur über die rationalen Zahlen verfügen, so dürfen wir

eigentlich nicht so tun, als ob es einen irrationalen Grenzwert gäbe, sondern wir haben, genau genommen, zu sagen: Es gibt zwei Arten von konvergenten Folgen: erstens solche, die einen rationalen Grenzwert haben, zweitens solche, die keinen rationalen Grenzwert haben. Das ist nur ein anderer Ausdruck für die uns schon bekannte Tatsache, daß das rationale Zahlensystem nicht abgeschlossen ist gegenüber der Limesoperation.

Wir stehen demnach wieder vor der Aufgabe, das Zahlengebiet zu erweitern. Und der Weg dazu ist uns durch die vorangegangenen Betrachtungen klar vorgezeichnet: Wir werden einen Kalkül mit Folgen nach dem Muster von Kapitel 11 aufbauen. Die Elemente unserer Betrachtung werden also Folgen rationaler Zahlen sein und zwar konvergente Folgen in dem eben erklärten Sinn. Wir werden zeigen, daß sich diese Folgen vermittels der Beziehungen „größer“, „gleich“, „kleiner“ ordnen lassen und daß man für sie klare Rechenoperationen definieren kann. Das wird uns schließlich das Recht geben, die Folgen selbst als eine neue Art von Zahlen, als „reelle Zahlen“ zu bezeichnen.

Diese Art der Einführung läßt mit einem Schlag die Schwierigkeiten verschwinden, mit denen die ältere Auffassung den Begriff der irrationalen Zahl behaftet. Es gibt heutzutage mehrere Theorien der irrationalen Zahlen. Wir geben im Nachstehenden eine Skizze dieses Aufbaues A nach Cantor, B nach Dedekind.

A. Cantors Theorie.

Df. 1. Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ heißt eine Nullfolge, wenn für jedes ε ein N existiert, so daß

$$|a_n| < \varepsilon, \text{ wofern nur } n > N.$$

Infolgedessen ist die Folge $0, 0, \dots 0, \dots$ eine Nullfolge.

Satz 1. Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, dann ist auch $(-a_n)$ eine Nullfolge.

Satz 2. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so ist auch $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.

Df. 2. Zwei Folgen heißen gleich, wenn ihre Differenzenfolge eine Nullfolge ist. In Zeichen: $(a_1, a_2, \dots a_n, \dots) = (b_1, b_2, \dots b_n, \dots)$, wenn $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots a_n - b_n, \dots)$ eine Nullfolge ist.

Diese Definition genügt den Forderungen, die wir an den Gleichheitsbegriff stellen; sie ist

- a) reflexiv: $(a_n) = (a_n)$, denn $(a_n - a_n) = (0)$ ist eine Nullfolge;
- b) symmetrisch: aus $(a_n) = (b_n)$ folgt $(b_n) = (a_n)$, denn mit $(a_n - b_n)$ ist zugleich $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge;
- c) transitiv: aus $(a_n) = (b_n)$ und $(b_n) = (c_n)$ folgt $(a_n) = (c_n)$; denn sind $(a_n - b_n)$ und $(b_n - c_n)$ Nullfolgen, so ist auch die durch Addition entstandene Folge $(a_n - c_n)$ eine Nullfolge.

Eine Folge dieser Definition ist es, daß es stets unendlich viele Zahlenfolgen gibt, die einander gleich sind. (Das erinnert an die Tatsache, daß es unendlich viele Zahlenpaare gibt, welche dieselbe rationale Zahl darstellen.)

Wir kommen nun zu den Begriffen „positiv“ und „negativ“.

Df. 3. Eine Folge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ heißt positiv, wenn es eine positive rationale Zahl r gibt, so daß fast alle Glieder der Folge rechts von r liegen. Eine Folge heißt negativ, wenn es eine negative rationale Zahl s gibt, so daß fast alle Glieder der Folge links von s liegen.

Es muß nun bewiesen werden, daß die Eigenschaften positiv, negativ und Nullfolge unverträglich sind und daß sie eine erschöpfende Disjunktion bilden. Dies sprechen wir aus in den beiden folgenden Sätzen:

Satz 3: Eine Folge kann nicht sowohl positiv wie negativ oder eine Nullfolge sein.

Ist nämlich eine Folge positiv, so liegen ihre Glieder nahezu alle rechts von einer festen positiven Zahl r ; dann können sie aber nicht beliebig klein werden, können also gewiß keine Nullfolge und noch weniger eine negative Folge darstellen. Ebenso erkennt man: Ist eine Folge negativ, so ist sie keine Nullfolge und erst recht nicht positiv. Ist eine Folge schließlich eine Nullfolge, so heißt das, daß ihre Glieder beliebig klein werden; dann läßt sich aber weder eine positive noch eine negative Konstante angeben, so daß ihre Glieder fast alle rechts von der einen oder fast alle links von der anderen lägen.

Satz 4. Diese drei Möglichkeiten bilden eine erschöpfende Disjunktion: eine konvergente Folge ist entweder positiv oder negativ oder eine Nullfolge.

Denn entweder gibt es eine positive Zahl r , so daß fast alle Glieder a_n rechts von r liegen; oder es gibt eine negative Zahl s , so daß fast alle Glieder links von s liegen; oder es tritt keiner dieser Fälle ein. Das könnte z. B. daran liegen, daß unendlich viele Glieder der Folge rechts von r und unendlich viele andere links von s liegen, d. h. daß die Glieder hin- und herspringen; das aber wäre mit der Konvergenz der Folge unverträglich. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß die Glieder der Folge weder fast alle rechts von r noch fast alle links von s liegen, sondern daß sie zwischen r und s gelegen sind; da nun r und s ganz beliebige Zahlen sein sollten, so heißt das, daß fast alle Glieder in einem beliebigen (also auch beliebig kleinen) Intervall um 0 gelegen sind, mithin eine Nullfolge bilden.

Aber noch eine Frage taucht auf. Nach einer früher gemachten Bemerkung gibt es stets unendlich viele Folgen, die untereinander gleich sind. Ist nun die Eigenschaft einer Folge, positiv zu sein, auf die ihr gleichen Folgen übertragbar? Mit andern Worten: Ist positiv ein Merkmal, das etwa an der besonderen Form der Folge haftet und das verloren geht, wenn man

die Folge durch eine beliebige andere, ihr gleiche ersetzt? Antwort darauf gibt der

Satz 5. Ist (a_n) positiv und ist $(a_n) = (b_n)$, so ist auch (b_n) positiv.

Ist nämlich (a_n) positiv, so liegen fast alle Glieder rechts von einer gewissen positiven Zahl r ; dasselbe muß aber von den Gliedern der Folge (b_n) gelten, da diese immer dichter an die Glieder der ersten Folge heranrücken.

Was wir eben von den positiven Folgen bewiesen haben, gilt genau so für den Fall, daß die Folge negativ oder eine Nullfolge ist.

Für das Folgende brauchen wir noch zwei weitere Sätze:

Satz 6. Ist die Folge (a_n) positiv, so ist die Folge $(-a_n)$ negativ.

Satz 7. Sind (a_n) und (b_n) beides positive Folgen, so ist auch $(a_n + b_n)$ positiv.

Wie schreiten nun weiter zur Definition von „größer“ und „kleiner“.

Df. 4. Die Folge (a_n) heißt größer als die Folge (b_n) , in Zeichen

$$(a_n) > (b_n),$$

wenn die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ positiv ist.

Df. 5. $(a_n) < (b_n)$, wenn $(a_n - b_n)$ negativ ist.

Die so definierten Beziehungen sind a) irreflexiv, b) asymmetrisch, c) transitiv.

ad a) Keine Folge ist größer als sie selbst; wäre nämlich $(a_n) > (a_n)$, so hieße das, daß $(a_n - a_n)$, das ist die Folge (0) , positiv wäre, während sie eine Nullfolge ist.

ad b) Ist $(a_n) > (b_n)$, so ist $(a_n - b_n)$ positiv (Df. 4); dann ist aber $(b_n - a_n)$ negativ (Satz 6) und folglich $(b_n) < (a_n)$ (Df. 5).

ad c) Ist $(a_n) > (b_n)$ und $(b_n) > (c_n)$, so sind $(a_n - b_n)$ und $(b_n - c_n)$ beide positiv; nach Satz 7 ist auch die durch Addition entspringende Folge $(a_n - b_n + b_n - c_n) = (a_n - c_n)$ positiv, d. h. es ist $(a_n) > (c_n)$.

Wir sind nun so weit, folgenden grundlegenden Satz zu beweisen:

Satz 8. Die konvergenten Folgen bilden ein geordnetes System.

Greift man nämlich zwei beliebige Folgen (a_n) und (b_n) heraus, so soll (a_n) entweder größer, gleich oder kleiner als (b_n) sein; der Fall der Unvergleichbarkeit, an den man etwa noch denken könnte, soll also ausgeschlossen sein. Das geht einfach darauf zurück, daß $(a_n - b_n)$ entweder eine positive, negative oder eine Nullfolge ist und daß diese drei Möglichkeiten eine erschöpfende Disjunktion bilden.

Nachdem wir uns so über die Ordnungsfähigkeit der konvergenten Folgen orientiert haben, wenden wir uns der Erklärung der Rechenoperationen zu.

Definition der Summe: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$.

Der Leser erinnert sich, welche Forderungen wir an den Begriff der Summe zu stellen haben:

a) Die Summe soll existieren; d. h. die Summe zweier konvergenter Folgen soll wieder eine konvergente Folge sein.

b) Die Summe soll eindeutig bestimmt sein; ersetzt man (a_n) und (b_n) durch irgendwelche andere, ihnen gleiche Folgen (a'_n) und (b'_n) , so soll $(a_n + b_n) = (a'_n + b'_n)$ sein.

c) Sie soll dem assoziativen und

d) dem kommutativen Gesetze gehorchen.

Indem wir den genauen Nachweis des Erfülltseins dieser Forderungen übergehen — einiges ist in dem Kapitel über das Rechnen mit Folgen angedeutet —, wollen wir gleich die Erklärung der anderen Rechenoperationen anschließen:

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$$

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

$$(a_n) : (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

Es zeigt sich, daß diese Rechenoperationen dieselben formalen Eigenschaften besitzen wie die gleichbenannten Operationen im Bereich der rationalen Zahlen.

Das Ergebnis ist somit: Wir können die Folgen vergleichen und wir können mit ihnen ganz analoge Rechenoperationen ausführen wie mit rationalen Zahlen.

Es liegt also nichts mehr im Wege, die konvergenten Folgen als eine neue Art von Zahlen zu bezeichnen, als reelle Zahlen. Wie verhalten sich nun die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen? Wieder müssen wir uns vor dem Irrtum hüten, die rationalen Zahlen als Teil in die reellen einzufügen; wohl aber können wir eine Zuordnung herstellen zwischen einem Teil der Folgen und den rationalen Zahlen: wir können nämlich jeder rationalen Zahl r die Folge

$$(r, r, \dots, r, \dots)$$

entsprechen lassen — oder überhaupt jede Folge, die gegen r konvergiert — und erkennen dann sofort, daß zwei solche Folgen, etwa (r, r, \dots, r, \dots) und (s, s, \dots, s, \dots) , in genau denselben Beziehungen zu einander stehen wie die rationalen Zahlen r und s : Die beiden Folgen heißen gleich, wenn r und s gleich sind, die eine Folge heißt größer als die andere, wenn r größer ist als s , der Summe der beiden Folgen entspricht die Summe der Zahlen r und s , kurzum, die rationalen Zahlen und diese besonderen Folgen (die Folgen mit rationalem Grenzwert) sind eineindeutig, ähnlich und isomorph aufeinander bezogen. Daran liegt es offenbar, daß die rationalen Zahlen

als spezieller Fall der reellen erscheinen. Wir werden aber den Unterschied deutlich hervorheben, indem wir zwischen der rationalen Zahl r und der rationalen reellen Zahl $(r, r, \dots r, \dots)$ unterscheiden.

Wenn wir die Folgen als Zahlen bezeichnen, so halten wir uns dabei nur an ein Prinzip, das schon die ganze Zeit hindurch unser Führer war und uns bei der Begriffsbildung der ganzen und der rationalen Zahl geleitet hat. Dennoch lag in der Idee, die Folgen selbst als Zahlen anzusehen, als sie zuerst auftauchte, etwas so Kühnes, daß manche Mathematiker davor zurückschreckten: Eine Folge, so haben sie etwa gesagt, ist doch etwas, das aus unendlich vielen Zahlen zusammengesetzt ist; sie hat nicht die geringste Ähnlichkeit mit dem Begriff einer Größe, die sich auf der Zahlenlinie darstellen läßt. Und wenn man die Folge als Vorschrift oder als Gesetz zur Erzeugung von Zahlen deutet, so gehört sie doch erst recht einer anderen logischen Kategorie an als die Zahlen selbst — ist es nicht absurd, mit Vorschriften oder Gesetzen zu rechnen?

Sehr drastisch zeigt sich dieser Abwehrkampf gegen die „formale Theorie“ der Irrationalzahlen bei du Bois Reymond. „Ein rein formalistisch-literales Gerippe der Analysis“, so lesen wir bei diesem Autor, „worauf die Trennung der Zahl von der Größe hinauslief, würde diese Wissenschaft zum bloßen Zeichenspiel hinabwürdigen, wo den Schriftzeichen willkürliche Bedeutungen beigelegt werden, wie den Schachfiguren und Spielkarten. So ergötzlich ein solches Spiel sein kann, so würde diese literale Mathematik bald genug in unfruchtbaren Trieben sich erschöpfen. Ohne Frage wird man mit Hilfe von sogenannten Axiomen, von Konventionen, ad hoc erdachten Philosophemen, unfaßbaren Erweiterungen ursprünglich deutlicher Begriffe nachträglich ein System der Arithmetik konstruieren können, welches dem aus dem Größenbegriff hervorgegangenen in allen Punkten gleicht, um so die rechnende Mathematik gleichsam durch einen Kordon von Dogmen und Abwehrdefinitionen gegen das psychologische Gebiet abzusperren. Auch kann ein ungewöhnlicher Scharfsinn auf solche Konstruktionen verwendet worden sein. Allein man würde auf dieselbe Weise auch andere arithmetische Systeme sich ausdenken können. Die gewöhnliche Arithmetik ist eben die einzige, dem lineären Größenbegriff“ (damit meint der Autor den Begriff der meßbaren Größe) „entsprechende¹⁾“. Sehr merkwürdig ist auch, daß H. Hankel, der Schöpfer einer rein formalen Theorie der rationalen Zahlen, sich mit Schärfe gegen diese Theorien wendet: „Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal und ohne den Begriff der Größe zu behandeln, muß auf höchst abstruse und beschwerliche Künsteleien führen, die, selbst wenn sie sich

¹⁾ Die allgemeine Funktionentheorie, S. 53f.

in vollkommener Strenge durchführen lassen, wie wir gerechten Grund haben zu bezweifeln, einen höheren wissenschaftlichen Wert nicht haben¹⁾).

Diesen Autoren scheint also eine Folge nicht das zu treffen, was sie sich unter einer reellen Zahl vorstellen. Sie sind vielmehr geneigt, die Folge, als den Näherungsprozeß, von dem Limes, der irrationalen Zahl zu unterscheiden und stehen dann freilich vor der Schwierigkeit, zu erklären, mit welchem Recht die Einführung der irrationalen Zahlen geschieht.

Aber im Grunde genommen sind es nur Unklarheiten des Denkens, psychologische Schwierigkeiten, welche dieser Angelegenheit den Schein eines Problems verleihen. Was meinen wir eigentlich damit, wenn wir sagen, wir kennen eine irrationale Zahl, z. B. $\sqrt{2}$, wir können uns eine Vorstellung von ihrer Größe machen? Was steckt hinter diesem Gefühl? Doch nicht mehr als die Kenntnis eines Verfahrens, $\sqrt{2}$ auf beliebig viele Dezimalen zu berechnen. Eine irrationale Zahl kennen heißt, ein Verfahren zu ihrer näherungsweise Berechnung kennen, und in diesem Sinne ist es vollständig berechtigt, die irrationalen Zahlen mit dem Näherungsverfahren (der Folge) zu identifizieren. Wenn man als Beispiel eines logischen Problems die Frage aufgeworfen hat: „nähert sich eine Folge bloß ihrem Grenzwert oder erreicht sie ihn wirklich?“ so können wir jetzt wohl dem Leser selbst die Antwort überlassen.

Ein zweiter Grund, der manche von dieser Gleichsetzung zurückhielt, ist der, daß man sich unter einer irrationalen Zahl einen Punkt auf der Zahlenlinie vorstellt und nun eine Schwierigkeit darin findet, ein Gesetz oder eine Vorschrift eine Zahl zu nennen. Was einen hier irreführt, ist wohl die Verwendung eines zu rohen und primitiven Gleichnisses: Man stellt sich etwa vor, daß man in die Menge der reellen Zahlen hineingreift, um eine herauszulangen, und bedenkt gar nicht, daß die irrationale Zahl nur durch eine Konstruktion gegeben ist, etwa durch einen konvergenten Prozeß, von dem sie nun einmal nicht abzulösen ist. In der Tat kann man das Wesen einer irrationalen Zahl am besten wiedergeben, wenn man sagt, sie sei eine Vorschrift zur Erzeugung von rationalen Zahlen. —

Wir haben nun einer Modifikation dieser Auffassung zu gedenken, die dem Bilde, das wir uns gewöhnlich von einer irrationalen Zahl machen, etwas näher kommt. Bisher haben wir beliebige (konvergente) Folgen zugelassen, ohne Gewicht darauf zu legen, ob die Folgen wachsend oder abnehmend oder hin- und herschwankend sind. Nun wollen wir die Betrachtung einengen auf „monotone“ Folgen, das ist auf Folgen, deren Glieder nur in einem Sinn variieren. Wir denken uns zwei solche monotone Folgen

¹⁾ Theorie der komplexen Zahlensysteme, S. 46.

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

gebildet, die folgende Eigenschaften haben:

1. Die erste Folge ist monoton aufsteigend, d. h.

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

2. Die zweite Folge ist monoton absteigend, d. h.

$$b_1 > b_2 > b_3 > \dots$$

3. Kein Glied der ersten Folge ist größer als das entsprechende Glied der zweiten Folge, also

$$b_1 > a_1, b_2 \geq a_2, b_3 \geq a_3, \dots$$

4. Die Differenzen $b_n - a_n$ sollen mit wachsendem n beliebig klein werden.

Ein Paar solcher Folgen wollen wir nun zusammenfassen und durch ein Symbol, etwa $\left(\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix} \right)$ bezeichnen. Es ist nicht schwer, die vorhin gegebenen Definitionen und Rechenregeln für Folgen auf solche Folgenpaare zu übertragen; statt mit konvergenten Folgen könnten wir einen Kalkül mit Folgenpaaren aufbauen. Geometrisch bedeutet ein solches Folgenpaar eine Intervallschachtelung. Die Punkte a_1, a_2, a_3, \dots rücken immer weiter nach rechts



die Punkte b_1, b_2, b_3, \dots immer weiter nach links, so daß sie eine Serie von Intervallen begrenzen, die sich unbeschränkt zusammenziehen. Es ist also nur eine geringfügige Abänderung der Cantorschen Theorie, wenn wir eine solche Intervallschachtelung als reelle Zahl bezeichnen.

Gerade diese Form der reellen Zahl drängt sich uns bei vielen Untersuchungen auf. Wir wollen nur zwei Beispiele anführen:

1. Ein unendlicher Dezimalbruch ist nichts weiter als ein abgekürzter Ausdruck für eine solche Intervallschachtelung. Wenn wir z. B. bei der Berechnung von $\sqrt{2}$ finden

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots,$$

so können wir das auch in der Form schreiben

$$\sqrt{2} = \left(\begin{matrix} 2, 1.5, 1.42, 1.415, \dots \\ 1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots \end{matrix} \right)$$

und ersehen daraus, daß durch die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ein Gesetz festgelegt ist, nach welchem Intervalle (von denen jedes folgende ein Zehntel des vorhergehenden ist) ineinandergefügt werden.

2. Wenn man die Fläche eines Kreises mit Hilfe der Elementargeometrie berechnen will, so geht man bekanntlich so vor, daß man dem Kreis der Reihe nach ein reguläres Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck, ... ein-

schreibt, andererseits ihm ein reguläres Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck, ... umschreibt, und so den Flächeninhalt des Kreises in ein immer enger werdendes Intervall einklemmt. Die Flächeninhalte der eingeschriebenen Vielecke bilden eine monoton aufsteigende, die Flächeninhalte der umgeschriebenen Vielecke eine monoton absteigende Folge, kein Glied der ersten Folge ist größer als ein Glied der zweiten und der Unterschied zwischen der Fläche eines umgeschriebenen und des entsprechenden eingeschriebenen Vielecks sinkt bei Fortsetzung dieses Verfahrens unter jeden positiven Wert hinab. Unsere vier Forderungen sind also erfüllt und man sieht, daß der Flächeninhalt des Kreises durch eine Intervallschachtelung, wie wir sie hier betrachten, dargestellt ist. (Man darf übrigens nicht glauben, daß das ein Beweis dafür ist, daß der Flächeninhalt eines Kreises so und so groß ist: sondern der Flächeninhalt wird dadurch definiert, daß wir sagen, er sei die gemeinsame Grenze, der sich die umgeschriebenen und die eingeschriebenen Vielecksflächen nähern. Der Begriff des Flächeninhalts ist ja zunächst nur für geradlinig begrenzte Gebilde erklärt und muß für krummlinig umgrenzte von neuem definiert werden.)

Das Verfahren der Intervallschachtelung ist oft ein sehr bequemes Mittel, um die Existenz gewisser Zahlen zu beweisen. Als Probe diene der Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß:

Jede beschränkte unendliche Punktmenge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Das Beiwort „unendlich“ besagt, daß die Menge aus unendlich vielen Punkten besteht, das Beiwort „beschränkt“, daß alle diese Punkte zwischen zwei festen Schranken a und b liegen, so daß die ganze Menge auf einem endlichen Stück der Geraden Platz hat.

Der Beweis besteht darin, daß wir das Intervall (a, b) halbieren und nun diejenige Hälfte auswählen, die unendlich viele Punkte enthält. (Falls in jedem Teilintervalle unendlich viele Punkte liegen, wählen wir nach Willkür eines aus.) Mit dem so ausgewählten Teilintervall verfahren wir genau so: wir teilen es wieder in die Hälfte und markieren uns dasjenige Teilintervall, das unendlich viele Punkte enthält. Auf diese Weise fortfahrend, gewinnen wir eine Serie ineinander geschachtelter Intervalle, deren Längen unbegrenzt abnehmen und die sich auf einen Punkt zusammenziehen. Dieser Punkt ist Häufungspunkt, denn er ist ja eben so konstruiert, daß jedes der Teilintervalle, in dem er gelegen ist, unendlich viele Punkte der Menge enthält. Ereignet es sich einmal, daß nach Teilung eines Intervalls in jede der beiden Hälften unendlich viele Punkte der Menge fallen, so gabelt sich das Verfahren: wir können den Prozeß mit der einen oder mit der anderen Intervallhälfte fortsetzen und erkennen so, daß es dann verschiedene Häufungspunkte gibt.

Eine andere Frage ist es, ob man immer entscheiden kann, welches Teilintervall dasjenige ist, das die unendlich vielen Punkte enthält. Wir setzen voraus, daß eine Strecke entweder endlich oder unendlich viele Punkte der Menge enthält, daß das objektiv feststeht, gleichviel ob wir es feststellen können oder nicht. An dieser Schlußweise wurde in letzter Zeit Kritik geübt, und der Intuitionist bestreitet z. B. die Rechtmäßigkeit eines solchen Verfahrens. Für ihn hat eine Aussage nur dann Sinn, wenn sie sich in endlich vielen Schritten nachprüfen läßt. Da der Satz von Bolzano-Weierstraß ein tragender Pfeiler der gesamten Analysis ist, so ermißt man, wie tief die Wirkungen dieser Kritik gehen. Die Verfolgung dieser Fragen würde aber über den Rahmen dieses Buches hinausführen.

Wir hatten uns das Ziel gesteckt, die Lückenhaftigkeit der rationalen Zahlen zu überwinden, d. h. die Limesoperation unbeschränkt ausführbar zu machen. Dieses Ziel ist erreicht: Jede konvergente Folge rationaler Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ hat einen Grenzwert, die reelle Zahl α , wobei α durch eben diesen konvergenten Prozeß definiert ist. Hier meldet sich aber eine weitere Frage: Was geschieht, wenn wir dieses Verfahren im Bereich der reellen Zahlen wiederholen? Das heißt, wenn wir Folgen bilden, deren Glieder reelle Zahlen sind? Werden wir dadurch etwa zu neuen Zahlen geführt, die mit den bisherigen Mitteln unerreichbar sind? Diese Frage ist für die Mathematik von beträchtlicher Bedeutung. Wenn sie zu bejahen wäre, würde sich folgendes Bild von dem Aufbau des reellen Zahlenreiches ergeben: Über das System der rationalen Zahlen würde sich zunächst eine Schicht von reellen Zahlen erster Stufe lagern, definiert als konvergente Folgen rationaler Zahlen; auf diesen Zahlen erster Stufe würden sich solche zweiter Stufe erheben, die konvergente Folgen von reellen Zahlen erster Stufe sind usw. Die Gesamtheit der reellen Zahlen würde sich demnach in eine Hierarchie gliedern, und man könnte nicht mehr von den reellen Zahlen schlechthin sprechen. Daß dadurch der Aufbau der Arithmetik viel verwickelter würde, liegt auf der Hand: bei jedem Beweis der Analysis müßte man erst nachsehen, für Zahlen welcher Stufe er gilt, und es wäre vielleicht unmöglich, allgemeine Gesetze auszusprechen. Zum Glück ist diese Unterscheidung nicht nötig. Es gilt nämlich der Satz, daß jede konvergente Folge reeller Zahlen ersetzt werden kann durch eine konvergente Folge rationaler Zahlen, so daß die Bildung konvergenter Folgen im Bereich der reellen Zahlen nichts Neues liefert.

Vorher eine Bemerkung. Eine Folge von reellen Zahlen ist ein neues Symbol, dessen Verwendung noch nicht erklärt ist. Wir setzen nun fest, daß die Regeln, die für konvergente Folgen rationaler Zahlen aufgestellt worden sind, auch für konvergente Folgen reeller Zahlen in Kraft bleiben

sollen; insbesondere sollen also zwei solcher Folgen gleich heißen, wenn ihre Differenzenfolge eine Nullfolge ist.

Um jetzt die Wahrheit der Behauptung einzusehen, bilde man irgendeine konvergente Folge reeller, z. B. irrationaler Zahlen

$$(I) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

Jede dieser Zahlen ist definiert als eine Folge rationaler Zahlen¹⁾

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots)$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots)$$

$$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, \dots),$$

so daß die Folge (I) eigentlich eine Folge von Folgen rationaler Zahlen darstellt. Die Behauptung geht nun dahin, daß diese Folge von Folgen durch eine einfache Folge ersetzbar ist. Wir müssen also eine Folge rationaler Zahlen angeben können, deren Glieder sich beliebig wenig von den Gliedern der vorgelegten irrationalen Folge unterscheiden; dann kann die eine Folge durch die andere ersetzt werden. Wir bestimmen uns nun in der ersten Folge einen Index N_1 so, daß von da ab der Unterschied der Glieder der Folge von α_1 kleiner ausfällt als 1^2), in der zweiten Folge gehen wir bis zu einem Index N_2 , von dem ab der Unterschied von α_2 kleiner ist als $\frac{1}{2}$ usf. Indem wir aus jeder dieser Folgen das Glied mit dem entsprechenden Index aussondern, stellen wir uns eine Folge rationaler Zahlen her

$$(II) \quad a_{1N_1}, a_{2N_2}, a_{3N_3}, \dots$$

Vergleichen wir nun die Folgen (I) und (II) miteinander, so bilden ihre Differenzen

$$\alpha_1 - a_{1N_1}, \alpha_2 - a_{2N_2}, \alpha_3 - a_{3N_3}, \dots$$

eine Folge, deren Glieder der Reihe nach kleiner sind als

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots,$$

die mithin eine Nullfolge ist. Demnach sind die Folgen (I) und (II) im Sinne unserer Definition gleich.

Das Ergebnis können wir auch so aussprechen: Das System der reellen Zahlen ist abgeschlossen gegenüber der Limesoperation. Damit tritt uns die formale Ähnlichkeit dieser Erweiterung mit den beiden früheren Erweiterungen des Zahlenbereiches klar vor Augen.

¹⁾ Wir verwenden in dem folgenden Tableau Doppelindizes.

²⁾ d. h. so, daß der Unterschied $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots) - (a_{1N_1}, a_{1N_1}, a_{1N_1}, \dots) < 1$ ist.

B. Dedekinds Theorie.

Eine Theorie anderen Stils ist die Dedekinds. Dedekind wurde dadurch auf seine Überlegungen geführt, daß er bei seinen Vorlesungen nie eine klare Definition der Stetigkeit geben konnte. Was es heißt, daß eine Gerade stetig ist, scheint anschaulich recht klar zu sein; aber dem Mathematiker ist das nicht genug, da er ein präzises Kriterium sucht, an das seine Deduktionen ansetzen können. Mit vagen Redensarten über das Aneinanderhaften der Punkte, über den lückenlosen Zusammenhang in den kleinsten Teilen usw. ist natürlich nichts getan, denn es läßt sich keine logische Ableitung von Sätzen darauf gründen. Dedekind nahm sich also vor, so lange über die Stetigkeit nachzudenken, bis er zu einer begrifflich klaren Definition käme. Schließlich fand er, was er suchte. Sein Gedankengang ist ebenso einfach wie originell. Der Leser stelle sich eine Gerade vor (etwa horizontal) und wähle auf ihr nach Belieben einen Punkt. Dieser Punkt ruft dann eine Zerlegung der Geraden in zwei Stücke von der Art hervor, daß jeder Punkt des einen Stückes links von jedem Punkt des anderen liegt. Den Punkt selbst kann man nach Gefallen dem einen oder dem anderen Stück zurechnen. Dedekind findet nun das Wesen der Stetigkeit in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip:

„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“

Dedekind fährt fort: „Wie schon gesagt, glaube ich nicht zu irren, wenn ich annehme, daß jedermann die Wahrheit dieser Behauptung sofort zugeben wird; die meisten meiner Leser werden sehr enttäuscht sein, zu vernehmen, daß durch diese Trivialität das Geheimnis der Stetigkeit enthüllt sein soll. Dazu bemerke ich folgendes. Es ist mir sehr lieb, wenn jedermann das obige Prinzip so einleuchtend findet und so übereinstimmend mit seinen Vorstellungen von einer Linie; denn ich bin außerstande, irgendeinen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und niemand ist dazu imstande. Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken.“

Die Tragweite dieses Gedankens wird sogleich hervortreten, wenn wir uns die Frage vorlegen, ob das System der rationalen Zahlen stetig ist in dem eben erklärten Sinn. Die rationalen Zahlen liegen bekanntlich dicht, und da wird leicht die Meinung entstehen, daß dicht soviel bedeute wie stetig. Das Kriterium von Dedekind zeigt sofort, daß dem nicht so ist. Nehmen wir

nämlich eine Zerlegung der rationalen Zahlen in zwei Klassen vor nach folgendem Prinzip: In die Klasse links tun wir alle rationalen Zahlen, die negativ sind, ferner Null und alle positiven Zahlen, deren Quadrat kleiner ist als 2; in die Klasse rechts tun wir alle übrigen Zahlen. Wir haben dann eine vollständige Zerlegung des rationalen Zahlensystems durchgeführt, bei der jede rationale Zahl in eine und nur in eine Klasse fällt. Aber wird nun diese Zerlegung durch eine rationale Zahl hervorgerufen? Das heißt, gibt es eine rationale Zahl, die entweder das größte Element der Unterklasse oder das kleinste Element der Oberklasse ist? Nein! Denn gerade an der Stelle, wo die beiden Klassen sozusagen zusammenstoßen, liegt nichts, denn $\sqrt{2}$ ist irrational. Es gibt also Zerlegungen der rationalen Zahlen in zwei Klassen, die durch keine rationale Zahl hervorgerufen werden. (Natürlich existieren auch Zerlegungen, die von einer rationalen Zahl herrühren. Wenn wir z. B. in die Unterklasse alle rationalen Zahlen links von 1 und in die Oberklasse alle rationalen Zahlen von 1 aufwärts tun, so werden die beiden Klassen gerade durch die Zahl 1 getrennt.) Jedenfalls gibt es Zerlegungen, die keiner rationalen Zahl entsprechen; es würde sich uns also die Unstetigkeit des rationalen Zahlensystems auch dann enthüllen, wenn wir noch nie etwas von irrationalen Zahlen gehört hätten.

In den reellen Zahlen werden wir dagegen ein Beispiel eines stetigen Systems kennen lernen, müssen uns aber zuvor mit ein paar Begriffen bekannt machen. Denken wir uns ein System von Dingen irgendwelcher Art (Zahlen, Punkte, ...), von denen wir nur voraussetzen wollen, daß sie geordnet sind, so daß von je zwei Dingen feststeht, welches das frühere und welches das spätere ist. (Die Dinge brauchen also nichts Quantitatives an sich zu haben.) Nun betrachten wir Zerlegungen der Dinge des Systems in zwei Klassen A und B, die folgende Eigenschaften haben:

1. Keine Klasse soll leer sein (d. h. es soll nie vorkommen, daß alle Dinge nur in eine Klasse fallen).

2. Jedes Ding der Klasse A soll jedem Ding der Klasse B in der Ordnung vorangehen.

3. Von jedem Ding soll eindeutig feststehen, in welche Klasse es gehört.

Eine solche Zerlegung werden wir einen „Schnitt“ nennen und mit (A/B) bezeichnen. Achten wir auf die Arten der Begrenzung der beiden Klassen, so sind vier Fälle möglich:

1. A hat ein letztes, B hat ein erstes Element.
2. A hat ein letztes, B hat kein erstes Element.
3. A hat kein letztes, B hat ein erstes Element.

4. A hat kein letztes, B hat kein erstes Element.

Im ersten Fall heißt der Schnitt sprunghaft, im zweiten und dritten Fall stetig, im vierten Fall lückenhaft. Wir können demnach Dedekinds Definition so formulieren: Ein geordnetes System ist stetig, wenn jeder Schnitt stetig ist, d. h. wenn weder Sprünge, noch Lücken auftreten. — Der Leser beachte noch einmal, daß die Verwendung dieser Definition nicht auf Zahlen beschränkt ist. Er mag auch an Helligkeiten, Tonhöhen u. a. denken. Doch wird er gut daran tun, sich diese Begriffe zunächst an Hand von Zahlbeispielen zu verdeutlichen.

1. Die Reihe der ganzen Zahlen weist Sprünge, aber keine Lücken auf. Wenn wir nämlich diese Zahlen irgendwie in zwei Kategorien zerlegen — z. B. alle Zahlen, die kleiner sind als 2 nach A, alle Zahlen von 2 aufwärts nach B werfen —, so wird die Unterklasse eine größte und die Oberklasse eine kleinste Zahl besitzen.

2. Das System der rationalen Zahlen weist Lücken, dagegen keine Sprünge auf (vgl. das auf der vorigen Seite erwähnte Beispiel).

In der letzteren Tatsache ist das gelegen, was man die Lückenhaftigkeit oder Unstetigkeit des rationalen Zahlensystems nennt. Der Zahlenvorrat ist eben zu arm, als daß jeder Schnitt durch eine Zahl erzeugt werden könnte. Im System der rationalen Zahlen gibt es mehr Schnitte als Zahlen. Das bringt uns nun auf den Gedanken, das Zahlensystem so zu erweitern, daß wir die Schnitte selbst als Zahlen in einem neuen Sinn auffassen. Ganz im Sinne unseres bisherigen Vorgehens versuchen wir einen Kalkül mit Schnitten aufzubauen, dessen erste Schritte im nachstehenden skizziert sind.

Df. 1. Zwei Schnitte (A/B) und (A'/B') heißen gleich, wenn A mit A' und B mit B' zusammenfällt.

Wenn wir das System der rationalen Zahlen an der Stelle 2 zerlegen, so können wir die Zahl 2 nach Gefallen der unteren oder der oberen Klasse zuweisen. Zwei solche Schnitte sehen wir als nicht wesentlich verschieden an; im Sinn unserer Definition aber wären sie ungleich. Aus diesem Grunde werden wir die Definition verbessern, indem wir erklären: Zwei Schnitte heißen gleich, wenn ihre Klassen zusammenfallen, höchstens mit Ausnahme einer Zahl.

Df. 2. Der Schnitt (A/B) heißt kleiner als der Schnitt (A'/B') , wenn es rationale Zahlen gibt, die zu A' , aber nicht zu A gehören.

Ganz analog lautet die Definition für „größer“.

Df. 3. Ein Schnitt heißt positiv, wenn seine Unterklasse mindestens eine positive Zahl enthält.

Df. 4. Ein Schnitt heißt negativ, wenn seine Oberklasse mindestens eine negative Zahl enthält.

Df. 5. Ein Schnitt heißt ein Nullschnitt, wenn es in der Unterklasse keine positive und in der Oberklasse keine negative Zahl gibt.

Df. 6. Unter der Summe der zwei Schnitte (A/B) und (A'/B') versteht man denjenigen Schnitt, den man erhält, wenn man immer eine Zahl aus A zu einer Zahl aus A' addiert und alle diese Summen zu einer neuen Unterklasse vereinigt und entsprechend mit den Zahlen aus B und B' verfährt.

Diese wenigen Striche mögen genügen, um dem Leser ein Bild von dem Aufbau dieser Theorie zu geben. Natürlich muß er sich vorstellen, daß man bei dem genauen Aufbau beweisen muß, daß die Begriffe der Gleichheit oder des Kleinerseins, der Summe usw. die formalen Eigenschaften besitzen, die wir von der Arithmetik der rationalen Zahlen her kennen.

Unter einer rationalen reellen Zahl werden wir jetzt einen Schnitt verstehen, der durch eine rationale Zahl hervorgerufen wird, nicht die rationale Zahl selbst. Zwischen den rationalen Zahlen und den zugehörigen Schnitten besteht nur eine Entsprechung, die eineindeutig, ähnlich und isomorph ist.

Was geschieht nun, wenn man im Bereich der so gewonnenen reellen Zahlen (der Schnitte) neuerdings Zerlegungen vornimmt? Kommt man dann etwa aus dem Bereich heraus? Da ist es nun von fundamentaler Bedeutung, daß das nicht der Fall ist, daß vielmehr der Satz gilt: Jeder Schnitt im Bereich der reellen Zahlen kann durch einen Schnitt im Bereich der rationalen Zahlen ersetzt werden. Um zwei solche Schnitte vergleichen zu können, müssen wir erst erklären, wann wir sie gleich nennen wollen. Bezeichnen wir einen Schnitt im System der reellen Zahlen mit $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, einen Schnitt im Bereich der rationalen Zahlen mit (A/B) , dann wird \mathfrak{A} nur aus reellen Zahlen, A nur aus rationalen bestehen. Beim Vergleich können wir uns auf die in \mathfrak{A} vorhandenen rationalen reellen Zahlen beschränken; wir erklären nun: Die zwei Schnitte sind gleich, wenn ihre Klassen in den rationalen Zahlen übereinstimmen.

Ist uns nun ein reeller Schnitt $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ vorgelegt, so bestimmen wir uns einen rationalen Schnitt (A/B) nach folgender Vorschrift: Eine rationale Zahl r wird dann in die Unterklasse A aufgenommen, wenn die entsprechende rationale reelle Zahl in der Unterklasse \mathfrak{A} vorkommt; sie wird dann in B aufgenommen, wenn die entsprechende Zahl in der Oberklasse \mathfrak{B} vorkommt. Der so gebildete Schnitt (A/B) ist offenbar dem Schnitt $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ gleich.

Unser Ergebnis ist also: Jeder Schnitt im Bereich der reellen Zahlen ist selbst eine reelle Zahl. Die Schnittbildung führt somit aus dem Bereich

nicht hinaus, und das heißt: Die reellen Zahlen bilden ein stetiges System, das reelle Kontinuum.

Wieder wollen wir an den Aufbau der abstrakten Theorie ein Beispiel anschließen, das uns zeigen soll, wie man mit diesen Begriffen tatsächlich arbeitet. Bekanntlich braucht eine unendliche Punktmenge weder ein Maximum noch ein Minimum zu besitzen, auch wenn sie auf einem begrenzten Stück der Zahlenlinie Platz hat — denken wir nur an die echten Brüche zwischen 0 und 1! Dagegen besitzt eine solche Menge immer eine obere und eine untere Grenze; in unserem Fall die Zahlen 0 und 1. Diese sind folgenderweise definiert: Nennen wir eine Minorante eine Zahl, die von allen Gliedern der Menge übertroffen wird; anschaulich gesprochen: einen Punkt, der links von der ganzen Punktmenge liegt. Offenbar gibt es unendlich viele solcher Minoranten. Wenn wir uns von allen Minoranten die größte genommen denken, so erhalten wir die untere Grenze. Diese ist also eine Zahl, die von allen Gliedern der Menge übertroffen wird, die aber sofort diese Eigenschaft verliert, sowie sie durch eine etwas größere Zahl ersetzt wird. Das mathematische Problem liegt nun in der Frage: Existiert die untere Grenze? Besitzt die Menge der Minoranten ein Maximum? Um das nachzuweisen, teilen wir die rationalen Zahlen folgenderart in zwei Klassen: in die Unterklasse nehmen wir alle Zahlen auf, die links von sämtlichen Zahlen der Menge liegen; in die Oberklasse nur solche, die von mindestens einer Zahl der Menge untertroffen werden. Es ist klar, daß diese Einteilung die Eigenschaften eines Schnittes hat und daher eine reelle Zahl g definiert. Diese Zahl g kann nicht größer sein als irgend eine Zahl der Menge. Wäre sie nämlich größer als eine Zahl der Menge, sagen wir α , so hieße das, daß es in der Unterklasse von g rationale Zahlen gibt, die rechts von α liegen, während doch diese Klasse so definiert war, daß sie keine rationale Zahl dieser Art enthalten sollte. Demnach liegen alle Zahlen der Menge links von g , folglich ist g eine Minorante. Ersetzt man sie aber durch eine etwas größere Zahl $g + \varepsilon$, so hört sie auf, Minorante zu sein; in die Unterklasse von $g + \varepsilon$ werden jetzt auch Zahlen fallen, die früher in der Oberklasse von g gelegen waren, das sind aber Zahlen, die von mindestens einem Glied der Menge untertroffen werden. Folglich ist $g + \varepsilon$ keine Minorante mehr. g ist demnach eine Minorante, zu der es keine größere gibt, d. h. sie ist das Maximum der Minoranten. — Wenn der Leser es schwierig finden sollte, diesem Beweis zu folgen, so gibt es ein gutes Mittel, um dem abzuhelfen: er versuche es, in ganz entsprechender Weise die Existenz einer oberen Grenze zu beweisen. Er wird dadurch gezwungen sein, in sich selbst die ganze Gedankenkette noch einmal zu erzeugen, und dann wird er die Sache verstehen.

Dedekinds Theorié läßt eine Modifikation zu. Da die Oberklasse eines Schnittes eindeutig bestimmt ist durch die Unterklasse, so genügt die letztere

zur Festlegung einer reellen Zahl. Wir wollen sie ein Segment nennen. Es ist nicht schwer, alle Definitionen auf Segmente zu übertragen. In dieser Weise werden die reellen Zahlen von Russell aufgebaut.

C. Vergleich der beiden Theorien.

Vergleichen wir nun die Systeme Cantors und Dedekinds! Die Gebilde beider Theorien wurden von uns reelle Zahlen genannt. Ist das nun eigentlich erlaubt? Sind es denn dieselben Zahlen? Nun, von einer Identität ist gewiß keine Rede, weil die Gebilde ganz verschieden definiert sind. Wohl aber besteht eine außerordentliche enge Entsprechung zwischen ihnen: die von Cantor und Dedekind geschaffenen Zahlensysteme lassen sich eineindeutig, ähnlich und isomorph aufeinander beziehen. Sie stellen also ein Zahlensystem von genau derselben Struktur dar. Wir werden das sofort erkennen, wenn wir folgende einfache Überlegung anstellen: Die Cantor'sche Theorie arbeitet mit Folgen oder, wie wir jetzt lieber sagen wollen, mit Intervallschachtelungen. Nun gibt es unendlich viele verschiedene Intervallschachtelungen, die sich auf einen und denselben Punkt zusammenziehen. Denken wir uns nun alle diese Schachtelungen (etwa auf der Zahlenlinie) übereinandergelagert, dann bilden alle linken Endpunkte die Unterklasse, alle rechten Endpunkte die Oberklasse des Dedekind'schen Schnittes. Der Schnitt ist demnach nichts anderes als eine Art von Zusammenfassung aller möglichen Intervallschachtelungen, die auf einen Punkt zusammenschrumpfen.

Vom Standpunkt Dedekinds kann man beweisen, daß eine Intervallschachtelung einen Punkt festlegt; vom Standpunkt Cantors kann man beweisen, daß jedem Schnitt eine reelle Zahl entspricht. Beide Theorien sind unabhängig voneinander und jeder Satz der Analysis kann sowohl in der einen wie in der anderen Theorie formuliert werden. Das ist der Grund, warum man in der Mathematik von reellen Zahlen schlechthin spricht und keinen Wert darauf legt, ob es Zahlen im Sinne von Cantor oder von Dedekind sind.

Das Grundelement der Cantor'schen Theorie ist die Folge, das Grundelement der Dedekind'schen die Klasse. Damit hängt ein gewisser Vorzug der Dedekind'schen Theorie zusammen: Sie bestimmt eine reelle Zahl durch einen einzigen Schnitt, wogegen es bei der Cantor'schen Theorie verschiedene Arten gibt, eine Zahl darzustellen. Während wir bei den Festsetzungen über „größer“, „gleich“, „kleiner“, „positiv“, „Summe“ usw. nach Cantor jedesmal beweisen mußten, daß die formalen Eigenschaften der Beziehungen und Operationen unabhängig sind von der besonderen Wahl der Folge, fällt diese Notwendigkeit bei Dedekind weg. Dedekinds Theorie kommt also mit wenigen Mitteln aus, sie geht sparsamer zu Werke und ist insofern als die einfachere anzusehen.

Von einem andern Standpunkt aus wird man wieder Cantors Theorie den Vorzug geben: Dedekind kann nur lineare Kontinua behandeln, Cantor beliebigdimensionale (Intervallschachtelungen in der Ebene, im Raum usw.).

Dedekinds Theorie führte zu einer überraschend einfachen Charakterisierung der Stetigkeit einer geraden Linie. Fragen wir noch zuletzt: Wie würde dieselbe Tatsache vom Ausgangspunkt Cantors zu formulieren sein?

Man könnte denken, eine Punktmenge sei stetig, wenn sie gegen die Limesoperation abgeschlossen ist, d. h., wenn jeder ihrer Häufungspunkte ihr angehört. Daß das nicht zutrifft, zeigt schon die Menge

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n},$$

die abgeschlossen, aber nicht stetig ist. Das liegt offenbar daran, daß sie bis auf 0 aus lauter isolierten Punkten (d. h. Punkten, die eine von Punkten der Menge freie Nachbarschaft besitzen) besteht. Man wird daher von einer stetigen Menge verlangen, daß jeder Punkt der Menge in beliebig enger Nachbarschaft von Nachbarpunkten umgeben ist, oder anders ausgedrückt, daß jeder Punkt der Menge ein Häufungspunkt ist. Das Wesen des stetigen Zusammenhangs einer Menge scheint demnach in folgenden zwei Eigenschaften aufzugehen:

1. Jeder Punkt der Menge ist Häufungspunkt.
2. Jeder Häufungspunkt der Menge gehört ihr an.

In der Mengenlehre wird die Gesamtheit der Häufungspunkte einer Menge M ihre Ableitung genannt und mit M^1 bezeichnet. Die beiden Eigenschaften lassen sich dann so ausdrücken:

1. Die Menge ist ganz in ihrer Ableitung enthalten: M ist ein Teil von M^1 .
2. Die Ableitung ist ganz in der Menge enthalten: M^1 ist ein Teil von M .

Das kommt aber darauf hinaus, daß M und M^1 zusammenfallen. Mengen dieser Art werden perfekt genannt. Cantor glaubte zunächst mit der Eigenschaft „perfekt“ das getroffen zu haben, was man gemeinhin „stetig“ nennt. Aber später entdeckte er, daß es perfekte Mengen gibt, die nirgends dicht sind, d. h. die so locker gefügt sind, daß sich kein noch so kleines

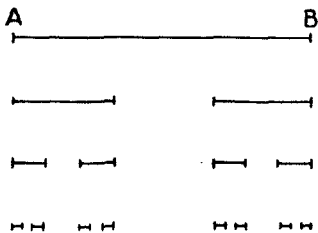


Fig. 24.

Intervall auf der Geraden aufweisen läßt, in dem die Punkte dicht lägen.

Um eine solche Menge herzustellen, gehen wir von einer beliebigen Strecke AB aus, tilgen ihr mittleres Drittel mit Ausnahme der Endpunkte, die stehen bleiben und wiederholen dieses Verfahren mit jeder der beiden Reststrecken: wir tilgen wieder ihre mittleren Drittel und setzen diesen Prozeß unbegrenzt

fort. (Vgl. die obenstehende Skizze.) Auf diese Weise entsteht eine sozu-

sagen unendlich fein durchlöcherte oder poröse Punktmenge, die folgende Eigenschaften hat:

1. Sie ist abgeschlossen, d. h. sie enthält ihre sämtlichen Häufungspunkte. Da bei jedem Konstruktionsschritt immer nur das Innere eines Intervalles getilgt wird, während die Randpunkte stehen bleiben, kann aus der abgeschlossenen Menge AB , von der wir ausgegangen sind, immer nur wieder eine abgeschlossene Menge entstehen. (Das gilt auch dann noch, wenn man das Verfahren ins Unendliche fortsetzt.)

2. Da niemals zwei getilgte Intervalle zusammenstoßen, kann kein isolierter Punkt entstehen; folglich besteht die Menge nur aus Häufungspunkten. 1 und 2 sagen zusammen, daß die Menge perfekt ist.

3. Es gibt kein Intervall von der Beschaffenheit, daß zwischen je zwei Mengenpunkten immer wieder ein Mengenpunkt läge; denn so klein ich dieses Intervall auch wähle, stets werden Punktepaare auftreten, nämlich die Endpunkte der getilgten Intervalle, zwischen denen kein weiterer Punkt liegt. Sie ist also nirgends dicht.

Die Eigenschaft „perfekt“ genügt demnach nicht, um die Stetigkeit der Geraden zu charakterisieren. Man muß außerdem verlangen, daß die Menge dicht ist — erst dann ergibt sich das (lineare) Kontinuum.

D. Die Einzigkeit des reellen Zahlensystems.

Die rationalen Zahlen wurden zwischen die ganzen, die irrationalen zwischen die rationalen Zahlen eingefügt, wobei über den Sinn dieses „Einfügen“ wohl kein Zweifel mehr bestehen wird. Wendet man im Bereich der reellen Zahlen die Limesoperation (oder die gleichbedeutende Schnittbildung) noch einmal an, so führt sie zu nichts Neuem. Danach erscheint der Prozeß der Zahlenerweiterung mit der Stufe der reellen Zahlen einen gewissen Abschluß erreicht zu haben. Aber das ist vorläufig nur eine Vermutung. Was sollen wir jemandem entgegenen, der uns sagt, es sei doch denkbar, daß eines Tages neue Operationen entdeckt werden, die uns zu einer abermaligen Verdichtung des reellen Zahlensystems nötigen?

Wir wollen zusehen, wie es mit dieser Frage bestellt ist. Zuvor aber müssen wir uns über die Voraussetzungen der Fragestellung verständigen, nämlich über das, was man unter einem „Zahlensystem“ verstehen will. Wenn wir fragen, ob sich das System der reellen Zahlen durch Einschalten neuer Elemente erweitern läßt, so schwebt uns doch vor, daß das erweiterte System irgendeine Art Ähnlichkeit mit dem der reellen Zahlen hat. Worin soll nun diese Ähnlichkeit bestehen? Es gibt ein paar naheliegende Forderungen, die das zu umreißen scheinen, was man von einem Zahlensystem (im erweiterten Sinn) verlangen wird:

1. Das System soll geordnet sein.
2. Es sollen in diesem System vier Rechenoperationen definiert sein, welche dieselben formalen Eigenschaften haben wie die Grundspezies der Arithmetik.
3. Das System soll einen echten Teil enthalten, der sich auf das rationale Zahlensystem eineindeutig, ähnlich und isomorph abbilden läßt (es soll somit eine Art Erweiterung des rationalen Zahlensystems darstellen).
4. Gefordert wird schließlich die Geltung des Archimedischen Axioms: sind α und β irgend zwei positive Zahlen des Systems und ist $\alpha < \beta$, so soll es möglich sein, α so oft zu sich zu addieren, daß die Summe

$$\alpha + \alpha + \dots + \alpha$$

schließlich β übertrifft; kurz gesagt: es soll stets eine natürliche Zahl n geben, so daß $n\alpha > \beta$ ist.

Wenn wir den Begriff des Zahlensystems so präzisieren, dann gibt folgender Satz Antwort auf die eingangs gestellte Frage:

Vollständigkeitssatz. Die reellen Zahlen bilden ein System, das bei Aufrechterhaltung der Forderungen 1—4 keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Wir bezeichnen mit R das System der reellen Zahlen, mit \bar{R} ein System, das den vier Bedingungen genügt und das sämtliche Zahlenindividuen von R enthält. Greifen wir nun eine beliebige Zahl aus \bar{R} heraus, sagen wir $\bar{\alpha}$. Nach Forderung 3 enthält das System \bar{R} ein Teilsystem, das dieselbe Struktur aufweist wie die rationalen Zahlen und das wir jetzt kurz „die rationalen Zahlen von \bar{R} “ nennen wollen. Man kann nun alle rationalen Zahlen von \bar{R} in zwei Klassen teilen, je nachdem ob sie kleiner oder größer sind als $\bar{\alpha}$. Der so gebildete Schnitt definiert eine reelle Zahl α , die ebenfalls zu \bar{R} gehört. Was könnte aber dann der Unterschied zwischen α und $\bar{\alpha}$ sein? Beide Zahlen werden durch genau dieselbe Klassenerlegung erfaßt, eingespannt, so daß sie auf der Zahlenlinie um kein noch so kleines endliches Stück differieren können. Wenn also überhaupt, so könnten sie sich nur um aktual unendlichkleine Größen unterscheiden. Das Auftreten solcher aktual unendlichkleiner Größen widerspricht aber dem Archimedischen Axiom, wie wir hier nur vorgreifend bemerken und bald ausführlich dartun werden. Jedes Element von \bar{R} ist sonach eine gewöhnliche reelle Zahl, so daß \bar{R} kein zahlenreicheres, R umfassendes System darstellen kann.

Eine zweite Frage ist die: In der Absicht, die Lückenhaftigkeit der rationalen Zahlen zu beseitigen, sind wir zu vier verschiedenen Konstruktionen gelangt; es sind dies:

Konvergente Folgen,
Intervallschachtelungen,
Dedekind'sche Schnitte,
Segmente.

Alle diese Systeme haben sich als ähnlich und isomorph erwiesen. Könnte man indes nicht andere Wege einschlagen, die uns zu wesentlich neuen Zahlensystemen führen? Genauer gesagt: Kann sich ein System, das den Forderungen 1—4 genügt und in welchem die Limesoperation (oder die Schnittbildung) unbeschränkt ausführbar ist, in irgendwelchen wesentlichen Zügen von dem System der reellen Zahlen unterscheiden? Diese Möglichkeit wird ausgeschlossen durch den

Eindeutigkeitssatz. Jedes solche System läßt sich auf das System der reellen Zahlen eineindeutig, ähnlich und isomorph beziehen. Es gibt also im wesentlichen nur ein solches System.

Es bezeichne R wieder das System der reellen Zahlen, \mathfrak{R} ein System irgendwelcher Dinge, das unseren Voraussetzungen genügt. \mathfrak{R} muß dann ein Untersystem von der Struktur der rationalen Zahlen enthalten. Wir gehen jetzt darauf aus zu zeigen: jedem Element von R läßt sich ein Element von \mathfrak{R} zuweisen. Greift man nämlich aus R irgendeine reelle Zahl a heraus, so wird sie etwa durch einen Schnitt im System der rationalen Zahlen definiert sein, so daß man schreiben kann

$$a = (A/B).$$

Ein genau entsprechender Schnitt kann aber in den rationalen Zahlen von \mathfrak{R} geführt werden (da jedem rationalen Element von R ein rationales Element von \mathfrak{R} entspricht); wir erhalten also auch dort eine Zerlegung

$$(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}),$$

die wegen der Stetigkeit des Systems \mathfrak{R} wieder eine Zahl a dieses Systems darstellt. Jeder reellen Zahl $a = (A/B)$ in R entspricht sonach ein Element $a = (\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ in \mathfrak{R} , und diese Entsprechung ist offenbar ähnlich und isomorph. \mathfrak{R} muß also mindestens so viel Elemente enthalten wie R (schärfer: ein Teilsystem von \mathfrak{R} muß sich eineindeutig ähnlich und isomorph auf R abbilden lassen), aber auch nicht mehr, da es nach dem Vollständigkeitsatz nicht erweiterbar ist. Folglich muß es im wesentlichen mit \mathfrak{R} zusammenfallen. Damit ist aber erkannt, daß das von uns geschaffene System der reellen Zahlen das einzig mögliche ist, das frei von Lücken ist und den Forderungen 1—4 genügt. —

Fragen wir nun zuletzt: Entspricht dem Kontinuum der reellen Zahlen etwas Objektives in der realen Außenwelt? Hat es in der Sprechweise Cantors eine transiente Realität? Man könnte denken, daß das arithmetische Kontinuum nur das Abbild des räumlichen ist. Boltzmann und Clifford haben darauf hingewiesen, daß möglicherweise unser Raum, ja auch die Zeit unstetig sind, daß z. B. alle Bewegungen in der Natur in winzig kleinen Sprüngen vor sich gehen könnten, wie im Film. Alle Beobachtungen wären auch mit der Annahme eines unstetigen Raumes und einer unstetigen Zeit verträglich. Und die heutigen Vorstellungen der Wellenmechanik zeigen,

daß es physikalisch sinnlos wird, von geometrischen Eigenschaften des physikalischen Raumes unterhalb einer gewissen Schwelle, nämlich derjenigen der Größenordnung der Atome zu sprechen. Von Dedekind wurde bemerkt, daß auch die Geometrie in mancher Hinsicht keinen stetigen Raum erfordert. Sieht man etwa nur diejenigen Punkte des Raumes als vorhanden an, die sich in einem bestimmten Koordinatensystem durch „algebraische Zahlen“ (vgl. S. 15) darstellen lassen, so ist dieser Raum überall unstetig; „aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes, sind in ihm alle Konstruktionen, welche in Euklids Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar, wie in dem vollkommen stetigen Raum; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklids Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden“. Dedekind fährt fort: „Wenn mir aber jemand sagt, wir könnten uns den Raum gar nicht anders als stetig denken, so möchte ich das bezweifeln und darauf aufmerksam machen, eine wie weit vorgeschrittene, feine wissenschaftliche Bildung notwendig ist, um nur das Wesen der Stetigkeit deutlich zu erkennen¹⁾.“

Für den physikalischen Raum pflegt man die Berechtigung dieser Gedanken zuzugestehen. Um so hartnäckiger verfißt man die Ansicht, daß die Anschauung das eigentliche Urbild des mathematischen Kontinuums sei. Was sollen wir von dieser Ansicht halten? Kann die Anschauung das leisten, was ihr da zugemutet wird? Beginnen wir mit einer ganz einfachen Frage: Sieht derjenige, der in ein Spektrum schaut, eine bestimmte Zahl von Farben? Offenbar nicht, wenn hier unter den Farben die einzelnen Farbnuancen gemeint sind. Sollen wir sagen, er sieht unendlich viele Farben — vielleicht so viele, wie es reelle Zahlen gibt? Das wäre eine Verirrung in ein falsches Gedankensystem hinein. Tatsächlich hat das Farbkontinuum eine ganz andere Struktur als das Zahlenkontinuum. Von zwei reellen Zahlen steht eindeutig fest, ob sie gleich oder verschieden sind. Mögen sie auf der Zahlenlinie noch so knapp nebeneinander liegen, so sind und bleiben es doch verschiedene Zahlen. Eine Farbe aber geht unmerklich in eine andere über, sie verschwimmt mit ihr, oder richtiger gesagt: Es hat keinen Sinn, von isolierten Elementen zu sprechen, aus denen sich das Kontinuum aufbauen soll. Auf Gebilde dieser Art ist der Begriff der Zahl nicht anwendbar; denn die erste Voraussetzung des Zählens ist die, daß sich die zu zählenden Dinge deutlich unterscheiden lassen. Die Sprache sagt daher mit einem ganz richtigen Gefühl, daß man zahllos viele Farben sieht. Es wird damit jede Zahlenangabe über Farben verboten und weiter nichts.

Ganz ähnlich steht es mit dem Sehraum. Der Leser frage sich, wie viele Punkte er im Gesichtsfeld wahrnimmt. Wenn er zu der Ansicht neigt, daß es

¹⁾ „Was sind und was sollen die Zahlen?“ S. XII, f.

unendlich viele sind, so überlege er, wie er diese Meinung rechtfertigen könnte. Besitzt er etwa ein Verfahren, jeder beliebigen Menge von Punkten einen weiteren hinzuzufügen, wie im Fall der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 usw? Im Falle der Zahlen ist dieses „und so weiter“ die Quelle, aus der der Zahlenstrom fließt. Aber im Fall der Punkte? Versucht er, das Kriterium von Dedekind anzuwenden und die Punkte des Gesichtsfeldes auf einen echten Teil ihrer selbst abzubilden, — so sieht er wieder, daß das „nicht geht“: in der Tat heißt es gar nichts, nach einer solchen Abbildung zu suchen, da das einzige Mittel, das dem Mathematiker hierfür zur Verfügung steht, die induktive Schlußweise, hier unverwendbar ist. „Ich sehe unendlich viele Punkte“ heißt nur, es hat keinen Sinn zu sagen: ich sehe nur zwanzig Punkte oder ich sehe nur dreißig Punkte oder ich sehe nur vierzig Punkte. Mit dem Unendlich der Mathematik hat das nichts zu tun. Dem anschaulichen Kontinuum kommt eben eine wesentlich andere Struktur zu. (Eben deshalb scheitert auch der Versuch, sich etwa die Menge der rationalen Zahlen im Gesichtsraum bildhaft vorzustellen.)

Nach alledem kann man nicht sagen, daß uns die reellen Zahlen in der Natur oder in der Anschauung vorgezeichnet sind. Sie sind eine freie Schöpfung unseres Geistes — freilich eine Schöpfung, zu welcher der Mathematiker von verschiedenen Seiten her angeregt wird. Und zwar stammen diese Antriebe aus zwei Richtungen: erstens von der Geometrie her (die Entdeckung des Irrationalen durch Pythagoras); zweitens von dem numerischen Rechnen mit Dezimalzahlen her, wie es sich seit der Renaissance allmählich eingebürgert hat. Indem man alle möglichen Dezimalbrüche betrachtet, entsteht ganz von selbst die Idee der reellen Zahl, die dann in den Theorien von Cantor und Dedekind nur eine Klärung und Präzisierung erfahren hat.

Kehren wir jetzt noch einmal zu den Grundlagen der analytischen Geometrie zurück! Diese beruht darauf, daß eine Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden und den reellen Zahlen angenommen wird, derzufolge jedem Punkt genau eine Zahl und jeder Zahl genau ein Punkt entspricht. Läßt sich das beweisen? Nein; sondern hier setzt ein neues Axiom ein, das von den Punkten der Geraden verlangt, daß sie eineindeutig den reellen Zahlen entsprechen sollen. Dieses Cantor-Dedekind'sche Axiom bildet die eigentliche Grundlage unserer gewöhnlichen analytischen Geometrie. Doch werden wir später eine Geometrie kennen lernen, in welcher dieses Axiom nicht gilt.

E. Verschiedene Bemerkungen.

Zuletzt soll noch auf gewisse Schwierigkeiten hingewiesen werden, die im Begriff der reellen Zahl liegen. Diese Schwierigkeiten werden am besten durch einen Gedankengang von Brouwer beleuchtet. Nehmen wir an, ich

bilde eine Reihe natürlicher Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nach folgender Vorschrift: $a_1 = 1, a_2 = 2$; für jeden weiteren Index n soll $a_n = n$ sein, wenn die Fermat'sche Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar ist; gibt es dagegen für $n > 2$ Lösungen dieser Gleichung und bezeichnet ν den kleinsten Wert von n , für den eine Lösung existiert, so soll von dem Index ν ab a_n immer $= \nu$ sein, d. h. $a_\nu = a_{\nu+1} = a_{\nu+2} = \dots = \nu$. Da das Fermat'sche Problem nicht gelöst ist, wissen wir nicht, ob die Zahlenreihe a_1, a_2, a_3, \dots ins Endlose wächst oder ob das Wachstum einmal abbricht und von da ab alle weiteren Glieder konstant sind. Mit Hilfe dieser Zahlenreihe bilden wir nun die Folge

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{a_1}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{a_2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{a_3}, \dots$$

die demnach so anfängt:

$$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\dots$$

Falls die Fermat'sche Gleichung keine Lösung hat, konvergiert diese Folge gegen 0; falls es dagegen eine kleinste Lösung mit geradzahligem Exponenten gibt, konvergiert die Folge gegen eine positive Zahl und falls sie einen ungeradzahligem Exponenten hat, gegen eine negative Zahl. Welcher von diesen drei Fällen eintritt, wissen wir nicht. Brouwer meint nun, daß wir hier eine reelle Zahl vor uns haben, die weder positiv, noch Null, noch negativ ist. Und mit Hilfe dieses Ergebnisses sprengt er eine ganze Reihe berühmter Sätze der klassischen Mathematik in die Luft.

Der Leser wird natürlich sagen, es sei ein Unterschied, ob die Gleichung eine Lösung hat oder ob wir sie kennen. An sich kann doch nur einer der drei Fälle eintreten: die Folge geht entweder gegen 0 oder sie bleibt bei einem positiven oder negativen Wert stehen; daß wir es nicht feststellen können, hat damit nichts zu tun. Brouwer würde ihm darauf erwidern, daß möglicherweise das Problem prinzipiell unentscheidbar ist und daß er daher kein Recht habe, so zu argumentieren.

Wenn wir hierzu Stellung zu nehmen hätten, so würden wir sagen: Ist das Fermat'sche Problem unentscheidbar, so stellt diese Folge gar keine reelle Zahl dar. Denn das Wesentliche an einer reellen Zahl ist ja ihre Vergleichbarkeit mit den rationalen Zahlen — nur deshalb kann sie als Punkt auf einer Geraden gedeutet werden. Gibt es zahlähnliche Gebilde, die sich mit den rationalen Zahlen nicht vergleichen lassen, so haben wir kein Recht, sie zwischen diese einzufügen, und es ist nur folgerichtig, wenn wir solchen Gebilden den Charakter reeller Zahlen absprechen.

Man kann genau dieselbe Überlegung mit Dezimalbrüchen anstellen, indem man etwa die Ziffernfolge eines Dezimalbruches irgendwie von der Lösung eines mathematischen Problems abhängig macht. Ein Beispiel

dafür wäre der Dezimalbruch $0\cdot a_1 a_2 a_3 \dots$, wobei die Ziffer a_n gleich 1 oder gleich 0 sein soll, je nachdem die Fermat'sche Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für n lösbar ist oder nicht. Der Dezimalbruch würde also beginnen $0\cdot 11000 \dots$, aber wir wüßten heute nicht, ob er $= 0\cdot 11$ oder $> 0\cdot 11$ ist. Wir würden wieder sagen: Wenn das Problem unlösbar ist, so ist durch diese Vorschrift keine reelle Zahl definiert.

Diese Betrachtungen regen uns an, dem Verhältnis zwischen reeller Zahl und Dezimalbruch nachzugehen. Man glaubt gewöhnlich, daß ein Dezimalbruch festliegt, definiert, gegeben ist, wenn wir seine Ziffern kennen, wenn uns also etwa die Folge der Ziffern ins Unendliche hingeschrieben wird. Aber ist das eigentlich richtig? Steckt nicht hinter der Ziffernfolge das Verfahren, das Gesetz, das die Ziffern erzeugt? Man könnte die Frage so stellen: Sind regellose, unendliche Dezimalbrüche denkbar? Sind sie überhaupt reelle Zahlen? Wie wäre es z. B., wenn man die Aufeinanderfolge der Ziffern durchs Los bestimmte, wäre damit eine reelle Zahl definiert — ja oder nein? Diese Frage würde heute wohl verschieden beantwortet werden. Wir würden sagen: Auch wenn das Intervall bei Fortsetzung des Verfahrens immer weiter eingeengt wird, so haben wir doch nicht das Recht, hier von einer Zahl zu sprechen, und zwar deshalb nicht, weil von solchen Bildungen andere Gesetze gelten als von reellen Zahlen. (Kann man fragen, ob so ein Dezimalbruch rational oder irrational ist?) Was einen hier irreführt, ist eine Analogie mit dem Sehraum: da geht eine Strecke, wenn man sie verkleinert, allmählich in einen Punkt über, und so ähnlich stellt man sich die Approximation einer reellen Zahl vor. Wenn man die Ziffernfolge, so denkt man, nur weiter und weiter fortsetzt, so nähert sich das Intervall einem Punkt. Der Schluß ist irrig: so weit man auch geht, die Lage des Punktes ist immer unendlich unbestimmt. Anders wäre es, wenn man ein Gesetz kennt; denn dann ist eben dieses Gesetz selbst die reelle Zahl. Und damit kommen wir auf den Punkt zu sprechen, der die ganze Täuschung hervorruft: das ist die Verwechslung der Extension mit dem Gesetz. Man bildet sich ein, daß man einen unendlichen Dezimalbruch auf zwei Weisen bestimmen könnte: durch Aufzählung der Ziffern o d e r durch ein Gesetz. Aber so ist es nicht: Eine reelle Zahl erzeugt Extensionen, sie ist keine Extension.

Es wäre interessant, von hier auf gewisse Theorien der Wahrscheinlichkeit zu blicken, die darauf beruhen, daß man einen Limes durch ein empirisches Verfahren, z. B. durch eine statistische Reihe definiert sein läßt. Wenn der Leser etwas mehr hierüber zu erfahren wünscht, so möge er einen Aufsatz des Verfassers in der „Erkenntnis“ von 1930 nachlesen.

Zusammenfassend kann man sagen: Die reellen Zahlen wurden geschaffen, um die Limesoperation unbeschränkt ausführbar zu machen. Nur ist das keine so einfache, klare und durchsichtige Operation wie etwa die

abstraktion, sondern eine Vorschrift, ein Gesetz zur Erzeugung rationaler Zahlen. Es gibt nun sehr verschiedenen Typen von Gesetzen und demnach wird es auch verschieden Arten reeller Zahlen geben. Zunächst sieht es so aus, als ob sie ein einheitliches System bildeten, wie die rationalen, aber unterstrichen wird diese Auffassung durch die gemeinsame Schreibweise als Dezimalbrüche. Aber schon die Entdeckung Gödels zeigt, daß hier durchaus andere Verhältnisse bestehen. Denn für jede Arithmetik lassen sich alle Zahlen angeben, die mit den Mitteln dieser Arithmetik nicht definierbar sind. Vor dem schärferen Blick löst sich das System der reellen Zahlen in eine unendliche Menge verschiedener Systeme auf, die nur eine gewisse Ähnlichkeit miteinander haben.

Fragen wir zuletzt: Geht die Widerspruchsfreiheit der Theorie der reellen Zahlen aus der Art ihrer Konstruktion aus den rationalen Zahlen hervor? Früher glaubte man das. Die Definitionen für das Rechnen mit Folgen sind ja genau gewissen Lehrsätzen nachgebildet (vgl. Kapitel 11); folglich, so meinte man, muß jeder Widerspruch zwischen unseren Festsetzungen einen ebensolchen zwischen den beweisbaren Lehrsätzen nach sich ziehen. Die Untersuchungen Gödels haben jedoch gezeigt, daß dem nicht so ist: die Widerspruchsfreiheit der Lehre von den reellen Zahlen kann vom Standpunkt der natürlichen Zahlen nicht erwiesen werden.

Den tieferen Grund, warum hier das Verfahren der Zurückführung versagt, kann man sich so klar machen: Während eine Aussage über eine positive oder negative oder eine rationale Zahl restlos in eine Aussage über natürliche Zahlen umgeformt werden kann, ist dies bei den reellen Zahlen nicht mehr möglich; hier kommt vielmehr ein wesentlich neues Element hinzu, nämlich der Begriff des Gesetzes (bei den Zahlenfolgen Cantors), resp. der Begriff der Klasse oder der Eigenschaft (bei den Dedekind'schen Schnitten). D. h. der Kalkül mit reellen Zahlen ist ein Kalkül mit Gesetzen der Klassen rationaler Zahlen und daher nicht in die Sprache der rationalen Zahlen übersetzbar.

14. Ultrareelle Zahlen.

Es gibt Probleme, die uns veranlassen, über die reellen Zahlen hinauszuschreiten zu Zahlensystemen, die sich unseren vier Forderungen nicht mehr fügen. Wir werden da zunächst zwei Beispiele betrachten.

1. Wenn sich der Leser die Funktion $y = \frac{1}{x}$ graphisch darstellt — er kann sich dabei auf die positiven Werte von x beschränken — so wird er finden, daß die Kurve gegen den Ursprung hin immer steiler ansteigt und, wenn x gegen 0 konvergiert, über alle Grenzen wächst. Eine solche Stelle nennt man eine Unendlichkeitsstelle oder einen Pol. Betrachten wir nun verschiedene Funktionen, von denen jede an der Stelle $x = x_0$ einen Pol besitzen möge. Die Frage, die wir uns jetzt vorlegen wollen, ist die: Kann man das Tempo des Wachstums dieser Funktionen miteinander vergleichen? Kann man das Unendlichwerden graduieren? Betrachten wir als Beispiel die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Wenn der Leser den Verlauf der letzteren Kurve in einer Zeichnung darstellt, so wird er bemerken, daß sie steiler ansteigt als die Bildkurve der ersten Funktion, und zwar so, daß das Verhältnis der beiden $\frac{g(x)}{f(x)}$ gegen ∞ geht. Man sagt in diesem Falle, die Funktion $g(x)$ werde von höherer Ordnung (stärker, schneller) unendlich als die Funktion $f(x)$ oder kürzer: $g(x)$ ist infinitär größer als $f(x)$. Strebt dagegen das Verhältnis $\frac{g(x)}{f(x)}$ einer festen numerischen Grenze zu (weder 0 noch ∞), so sagt man, die beiden Funktionen werden von derselben Ordnung unendlich oder sie sind infinitär gleich. Da die Beziehungen „größer“, „gleich“, „kleiner“ eine erschöpfende Disjunktion bilden, lassen sich die Pole in eine Reihe ordnen. Die vorher aufgeworfene Frage können wir nun so präzisieren: Kann man ein Maß einführen für das Tempo des Unendlichwerdens? Kann man die einzelnen Pole durch Zahlen charakterisieren, so daß einem infinitär größeren Pol immer die größere Zahl entspricht? Es ist leicht, eine unbegrenzte Folge von Funktionen herzustellen, von denen jede schneller ins Unendliche wächst als die vorhergehende; z. B. die Funktionen $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$. Diese Reihe kann man weiter verdichten, indem man gebrochene und schließlich reelle Exponenten hinzunimmt. Man wird nun versuchen, der Funktion $\frac{1}{x^\alpha}$ als „Maß“ oder „Grad“ die Zahl α zuzuordnen. Aber dann sind zur Bezeichnung der Pole dieses einen Funktionentypus schon

alle reellen Zahlen (von 0 aufwärts) aufgebraucht. Nun gibt es noch andere Funktionen, die an der Stelle $x = 0$ unendlich werden, z. B. $|\log x|$. Vergleicht man nun $|\log x|$ mit irgendeiner der Funktionen $\frac{1}{x^2}$, so ergibt die Rechnung, daß $\log x$ langsamer gegen ∞ geht als jede Funktion dieser Art. $|\log x|$ unterbietet im Tempo alle Funktionen der Form $\frac{1}{x^2}$. Eine Funktion wie $\frac{\log x}{x}$ wird daher infinitär größer sein als $\frac{1}{x}$ und doch kleiner als $\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$, wie klein man auch ε wählt. Will man dieser Funktion ein Maß beilegen, so kann man hierzu weder die Zahl 1 noch eine Zahl > 1 wählen — die Skala der reellen Zahlen reicht nicht mehr hin, um die Ordnung der Pole zu bezeichnen. Der Reihe der Pole kommt eine dichtere Struktur zu als dem Kontinuum der reellen Zahlen. Um sie zu graduieren, müßte man zu einem „ultrareellen“ Zahlensystem greifen — freilich um den Preis des Fallenlassens einiger der Forderungen, die wir an den Zahlenbegriff gestellt haben, etwa des Archimedischen Axioms. — Der Leser beachte, daß es sich bei diesem Problem eigentlich nur um das Auffinden eines Systems von Ordnungszahlen handelt — denn Rechenoperationen mit ihnen brauchte man nicht unbedingt zu definieren.

2. In mehrfacher Hinsicht interessant sind die „hornförmigen Winkel“, die schon im Altertum bekannt und umstritten waren. Wenn sich zwei Kurven schneiden, so versteht man unter ihrem Winkel gemeinhin den Winkel, den die im Schnittpunkt gezogenen Tangenten miteinander bilden. Diese Winkel bilden ein gewöhnliches archimedisches Größensystem. Nun kann man auch einen anderen Standpunkt einnehmen. Die Anschauung legt uns nahe, den hornförmigen Raum zwischen den beiden krummen Linien, die

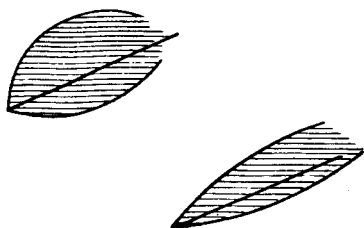


Fig. 25.

Gestalt, ins Auge zu fassen und zu fragen, ob sich diese Räume nicht direkt miteinander vergleichen lassen. Das ist gewiß möglich. Zunächst können wir den hornförmigen Winkel durch eine Gerade in zwei Teile zerschneiden (vgl. Fig. 25) und uns demnach auf Winkel beschränken, deren einer Schenkel eine Gerade ist. Man wird dann naturgemäß denjenigen von zwei Winkeln für den größeren erklären,

der über den anderen hinausgreift (falls man sich die beiden Winkel so aufeinanderlegt denkt, daß ihre Scheitel und geraden Schenkel zusammenfallen), und es ist klar, daß bei dieser Bestimmung die hornförmigen Winkel ein geordnetes System bilden.

Wenden wir dies insbesondere an auf die Winkel, die von einer Geraden

und einem sie berührenden Kreis gebildet werden (und die im gewöhnlichen Sinne gemessen alle gleich 0 sind), so sieht man, daß zu dem Kreis mit dem größeren Radius der kleinere hornförmige Winkel gehört. (Vgl. Fig. 26.)

Wir wollen daher den reziproken Wert des Radius $\frac{1}{r} = \omega$ als Maß für die Größe des krummlinigen Winkels festsetzen. Es ist klar, daß man dann die

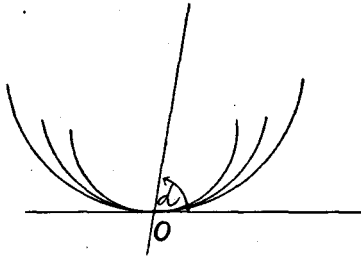


Fig. 26.

Reihe $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ bilden kann, indem man den Radius im entsprechenden Verhältnis verkleinert. Aber so weit man in dieser Reihe auch gehen mag, $n\omega$ wird immer kleiner bleiben als der geradlinige Winkel α . Das heißt, ω ist aktual unendlich klein gegenüber α , und das zeigt sehr anschaulich, daß hier das Archimedische Axiom versagt.

Will man diese Dinge mit Hilfe der Rechnung verfolgen, so muß man zunächst ausdrücken, daß die eben betrachteten Winkel aktual unendlich klein sind gegenüber einem gewöhnlichen Winkel. Man wird das tun, indem man eine aktual unendlich kleine Einheit einführt, die man etwa so definiert: als Einheit η gilt derjenige Winkel, den der Kreis mit dem Radius 1 mit seiner eigenen Tangente einschließt. Jeder andere Kreis wird dann mit seiner

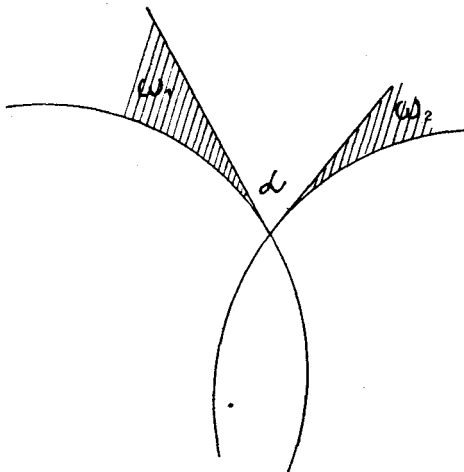


Fig. 27.

Tangente den Winkel $\omega = \frac{1}{r} \cdot \eta$ einschließen. Schneiden nun zwei Kreise einander, so setzt sich der hornförmige Winkel aus drei Stücken zusammen: aus dem Winkel α , den die beiden Tangenten einschließen und aus den beiden aktual unendlich kleinen Winkeln ω_1 und ω_2 .

Demgemäß erklären wir als Maß des Gesamtwinkels die Summe

$$\alpha + \omega_1 + \omega_2$$

oder

$$\alpha + \frac{\eta}{r_1} + \frac{\eta}{r_2},$$

wenn man mit r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise bezeichnet. Für die Größe η ist es dabei charakteristisch, daß $n \cdot \eta < 1$ ist, wie groß man auch n wählt.

Will man diese Definition auf beliebige Kurven übertragen, so wird man die Kurven im Schnittpunkt durch ihre „Schmiegunskreise“ ersetzen (d. i. durch Kreise, die sich an der gegebenen Stelle möglichst eng an die Kurven anschmiegen) und nun die Festsetzung treffen, daß als Winkel zwischen den Kurvenbögen der Winkel zwischen den entsprechenden Kreisbögen gelten soll. Voraussetzung ist dabei, daß die Kurven eine „Krümmung“ besitzen; das ist ebensowenig selbstverständlich, wie daß sie eine Richtung haben.

Schält man aus alledem den abstrakten Formalismus heraus, so handelt es sich darum, einen Kalkül mit Elementen von der Form $a + b\eta$ aufzubauen, in welchem das Archimedische Axiom nicht mehr gilt. Man wird nun Rechenregeln für diese Symbole festsetzen müssen. Dabei entsteht natürlich die Frage, was man unter η , η^2 , η^3 usw. verstehen soll. Es liegt nahe, sie als aktual unendlich kleine Größen höherer Ordnung aufzufassen. Diesen Standpunkt nimmt Veronese in seinen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie ein. Er denkt sich eine Hierarchie aktual unendlich kleiner Größen, d. h. eine Reihe von Größen η , ζ , \dots , von denen jede folgende aktual unendlich klein gegenüber den vorangehenden ist und baut mit ihrer Hilfe eine nichtarchimedische Geometrie auf, bei der der einzelne Punkt auf der Abszissenachse durch einen Ausdruck der Form

$$a + b\eta + c\zeta + \dots$$

gegeben ist, wo a , b , c , \dots gewöhnliche reelle Zahlen bedeuten. Was in der gewöhnlichen Geometrie ein Punkt ist, spaltet sich hier gewissermaßen in eine Punktwelt auf, etwa ähnlich wie ein heller Fleck am Himmel sich im Teleskop in eine Sternwolke auflöst.

Die Konstruktion solcher Zahlensysteme gehört in die große Gruppe von Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, durch die unter anderem die Frage der Unabhängigkeit der Axiome geklärt werden soll. Es ist das die Frage, ob unter den Axiomen, die wir einer bestimmten Geometrie zugrundelegen, nicht verkappte Lehrsätze auftreten, für die man nur bisher den Beweis nicht gefunden hat. Damit verhält es sich so: Gelingt es, eine widerspruchsfreie Geometrie aufzubauen, in der alle Axiome gelten mit Ausnahme eines, so kann dieses eine gewiß keine logische Folge der übrigen sein. Der Aufbau einer nichtarchimedischen Geometrie hat eigentlich nur den Zweck, die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms von den anderen darzutun.

Über die Ansicht, daß die Beschäftigung mit nichtarchimedischen Größensystemen eine bloße Spielerei sei, wird sich der Leser jetzt selbst ein Urteil bilden können. Daß uns solche Zahlen ungewohnt und sonderbar anmuten, hat seinen Grund wohl darin, daß sie mit dem Begriff der extensiven Größe, an den wir hauptsächlich denken, nichts zu tun haben. Gerade vom

Standpunkt der Logik ist aber die Vergleichbarkeit der verschiedenen Größen einer Art, z. B. der Längen, nicht selbstverständlich. „Diese Erkenntnis“, sagt Hilbert, „ist bekanntlich für die Geométrie von wesentlicher Bedeutung, scheint mir aber auch für die Physik von prinzipiellem Interesse; denn sie führt uns zu folgendem Ergebnis: die Tatsache, daß wir durch Aneinanderfügen irdischer Entfernungen die Dimensionen und Entfernungen der Körper im Weltenraum errechnen, d. h. durch irdische Maße die himmlischen Längen messen können, ebenso die Tatsache, daß sich die Distanzen im Atominnern durch das Metermaß ausdrücken lassen, sind keineswegs bloß eine logische Folge der Sätze über Dreieckskongruenzen und der geometrischen Konfiguration, sondern erst ein Forschungsergebnis der Empirie. Die Gültigkeit des Archimedischen Axioms in der Natur bedarf eben im bezeichneten Sinn geradeso der Bestätigung durch das Experiment, wie etwa der Satz von der Winkelsumme im Dreieck im bekannten Sinn¹⁾.“ Es wäre interessant, uns Erfahrungen auszumalen, die uns zum Aufgeben des Archimedischen Axioms brächten.

Es wurde schon erwähnt, daß das anschauliche Kontinuum nicht das mathematische ist. Die reellen Zahlen lassen sich auf das erstere nicht gut anwenden, und einige weitere Beispiele mögen uns das noch vor Augen führen. Denken wir uns, wir sähen auf einer Zeichnung eine große Zahl von Punkten, die sich zusammendrängen und ungefähr das Bild eines Streifens ergeben, und zwar für das Auge, das sie aus einiger Entfernung betrachtet. Dieser Streifen sei nirgends scharf begrenzt, sondern verliere sich allmählich in die Umgebung. Wie breit ist nun der Streifen? Da man ihn nicht scharf abgrenzen kann, so handelt es sich da um eine Messung in einem ganz anderen Sinn, eher um die Wiedergabe des Eindrucks, den der Streifen macht, also um das, was man Schätzung nennt. (Das geht schon daraus hervor, daß zwei nahe beieinander liegende Zahlangaben jetzt einander nicht widersprechen, während sie bei einer Messung im gewöhnlichen Sinn einen Widerspruch darstellen.) Ähnlich ist die Frage: Wo fängt in diesem Gebirgsprofil die Hochebene an? Auch hier ist keine Rede davon, daß man diesen Punkt scharf markieren kann. In einer verwandten Situation befinden wir uns, wenn wir gefragt werden: Von wo kommt der Schall? Wir könnten zur Antwort in die Richtung weisen, aber nur ungefähr, und das deutet darauf hin, daß wir es hier mit einem anderen Begriff der Richtung oder mit einer anderen Metrik des Winkels zu tun haben. Ebenso verhält es sich mit der Frage: Liegt dieses Orange genau in der Mitte zwischen rot und gelb? Es hat keinen Sinn, von „genau“ zu reden, es sei denn, daß eine Methode der Messung angegeben wird. (Farbmischung.) Aber dann bewegen wir uns

¹⁾ Axiomatisches Denken (Math. Ann., 78).

schon im Bereich der Physik und nicht der unmittelbaren Anschauung.

In all diesen Fällen ist die Verwendung reeller Zahlen nicht ganz am Platz. Vielleicht wird man eines Tages eine Mathematik des Verschwommenen konstruieren, die solchen Verhältnissen besser angepaßt ist. So könnte man sich Axiome für Zahlen formuliert denken, nach welchen „größer“, „gleich“ „kleiner“ keine erschöpfende Disjunktion bilden, sondern wo eigentümliche Zonen der Unbestimmtheit oder der geringen Unterscheidbarkeit vorgesehen sind. Aber schließlich würde das auf nichts anderes hinauslaufen als auf die Formulierung der Grammatik des Wortes „ungefähr“.

15. Komplexe und hyperkomplexe Zahlen.

Eine andere Erweiterung des Zahlensystems ist viel älter: es sind die imaginären Zahlen, die in der abendländischen Mathematik seit der Mitte des 16. Jahrhunderts auftreten. Es gibt zwei Motive, die zu einer solchen Erweiterung drängen. Das eine ist algebraischer Natur. Die Nichtauflösbarkeit der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ war der Anlaß, einen neuen Typus von Zahlen in den Rechnungen zuzulassen, die Quadratwurzeln aus negativen Größen. Daneben darf ein zweites Moment nicht übersehen werden, das erst später hervortritt: In der Geometrie wie in der Physik tritt der Begriff der „gerichteten Größe“ oder des Vektors auf, und es erweist sich nun als wünschenswert, zum Begriff des Vektors ein rein arithmetisches Analogon zu bilden. Von hier gehen die Anregungen zur Schöpfung höherer komplexer Zahlen aus.

Vorläufig aber wollen wir von den gewöhnlichen komplexen Zahlen sprechen, und da müssen wir zunächst etwas über die Bedeutung der imaginären Zahlen für das Ganze der Mathematik sagen. Diese Bedeutung liegt nicht allein darin, daß mit ihrer Hilfe das Ziehen der Wurzel aus negativen Zahlen möglich wird. Durch ihre Einführung erfährt vielmehr die Algebra und Analysis eine große Vereinfachung; der wahre Wert solcher Zahlen liegt darin, daß durch sie ganz verschiedene Teile der Mathematik miteinander in Verbindung gesetzt werden, ferner darin, daß man eine vollständige innere Einsicht in manche Probleme nur dann erlangt, wenn man die Beschränkung auf das Reelle abstreift und sich in das komplexe Gebiet begibt. Als erstes Beispiel haben wir hier Eulers berühmte Relation

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

anzuführen, durch die mit einem Schlag ein Zusammenhang zwischen scheinbar ganz verschiedenartigen Funktionen aufgedeckt wurde. Ihre volle Entfaltung findet diese Idee in der modernen Funktionentheorie, in der ganz allgemein Abhängigkeiten zwischen komplexen Zahlen studiert werden, also Funktionen

$$w = f(z),$$

wobei $z = x + iy$ und $w = u + iv$ komplex sind. Die geometrische Deutung besteht jetzt darin, daß man sich zwei Ebenen denkt, die z -Ebene und die w -Ebene, und nun einem Punkt der z -Ebene vermöge der Rechenvorschrift f einen Punkt der w -Ebene entsprechen läßt. Eine jede solche Funktion $w = f(z)$ leistet also eine Abbildung einer Ebene auf die andere, und es zeigt

sich nun, daß die wesentlichen, tiefer liegenden Eigenschaften der Funktionen gerade in der Art der durch sie vermittelten Abbildung zutage treten. So kann man ganze große Funktionsklassen durch überraschend einfache Eigenschaften charakterisieren, z. B. durch die Eindeutigkeit, das Auftreten von Polen usw.

Manche Erscheinungen kann man vom Standpunkt des Reellen überhaupt nicht verstehen, z. B. das Verhalten der Funktion $\log x$. Wenn man fragt, was der Logarithmus einer negativen Zahl sei, so bietet sich folgende Überlegung an: Setzen wir $\log(-1) = x$, dann ist $\log(-1)^2 = 2 \log(-1) = 2x$; andererseits aber ist $\log(-1)^2 = \log 1 = 0$, also muß $2x = 0$ sein, und so kommt heraus, daß der Logarithmus von -1 Null ist, — was doch augenscheinlich nicht stimmt. Wo der Fehler liegt, ist mit den Mitteln der Schulmathematik nicht zu entdecken. Alles das wird klar, sobald man sich zum Standpunkt der Funktionentheorie erhebt; dann zeigt es sich, daß die Funktion $\log z$ unendlich vieldeutig ist, gewissermaßen unendlich viele einzelne Funktionen darstellt, die aber doch wieder in ganz bestimmter Weise zusammenhängen. Erst dadurch erhält man einen Einblick in den komplizierten Organismus dieser Funktion. Beschränkt man sich auf den Ausschnitt, den das Reelle gibt, so entgeht einem das Wesentliche; man gleicht dem Beobachter im Platonischen Höhlengleichnis, der nur die Schatten der Gegenstände vorüberwandeln sieht und dem die wirklichen Dinge ewig fremd bleiben. Dies hatte wohl auch Gauß im Sinn, als er sagte, ihm sei „die Analyse eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingierten Größen außerordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblicke Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genötigt sein würde“.

Die geometrische Versinnlichung, die Gauß von den komplexen Zahlen gab, war sehr brauchbar für die Mathematik, aber sie gab keine Antwort auf die Frage, mit welchem Recht die imaginären Zahlen eingeführt werden. 1835 entwickelte Hamilton eine Theorie, in der ganz im modernen Geist eine komplexe Zahl als ein Paar (couple) von reellen Zahlen aufgefaßt wird, deren Verknüpfungsgesetze willkürlich gewählt werden können. Wir bezeichnen ein solches Zahlenpaar mit (a, b) und heißen a und b die Komponenten. Die nachstehende Skizze wird die Hauptpunkte des Aufbaues hervortreten lassen.

Df. 1. Zwei Zahlenpaare heißen gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind; in Zeichen:

$$(a, b) = (c, d), \text{ wenn } a = c \text{ und } b = d \text{ ist.}$$

Die Begriffe „größer“ und „kleiner“ werden nicht eingeführt.

Df. 2. Die Summe (Differenz) zweier Zahlenpaare ist das Paar, gebildet aus der Summe (Differenz) der Komponenten:

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d).$$

Man sieht sofort, daß alle formalen Bedingungen für diese Begriffe erfüllt sind.

$$\text{Df. 3.} \quad - (a, b) = (-a, -b).$$

Aus der Definition der Summe folgt, daß

$$(a, b) + (a, b) = (2a, 2b),$$

was wir kürzer schreiben können,

$$2(a, b) = (2a, 2b).$$

Durch Induktion erkennt man, daß allgemein

$$n(a, b) = (na, nb)$$

ist. Ein Zahlenpaar wird also vervielfacht, indem man seine Komponenten vervielfacht. Auch die Division durch eine ganze Zahl ist dadurch erklärt; setzt man nämlich

$$\frac{1}{m}(a, b) = (x, y),$$

so folgt

$$(a, b) = m(x, y) = (mx, my),$$

woraus sich $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$ ergibt. Daraus folgt weiter:

$$\frac{n}{m}(a, b) = (n \cdot \frac{1}{m})(a, b) = (\frac{n}{m}a, \frac{n}{m}b).$$

Freilich wurde dabei eine neue Voraussetzung gemacht: daß das assoziative Gesetz der Multiplikation gilt. Nach Df. 3 ist die letzte Formel auch noch richtig, wenn $\frac{n}{m}$ negativ ist, so daß wir allgemein für jede rationale Zahl r haben

$$r(a, b) = (ra, rb).$$

Dagegen läßt sich nicht beweisen, daß für eine beliebige reelle Zahl ϱ

$$\varrho(a, b) = (\varrho a, \varrho b)$$

ist. Wir werden darin eine Festsetzung erblicken, die aber so getroffen ist, daß sie sich an die Multiplikation mit rationalen Zahlen anschließt, also der Forderung der Permanenz genügt.

Wir sind nun imstande, jedes Zahlenpaar in einer Normalform darzustellen. Es ist nämlich

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$$

Die hier auftretenden Zahlenpaare $(1, 0)$ und $(0, 1)$ werden die „komplexen Einheiten“ genannt und mit e_1, e_2 bezeichnet. Dann stellt sich jedes Zahlenpaar dar als eine lineare Kombination der Einheiten

$$(a, b) = ae_1 + be_2.$$

Was sollen wir nun unter dem Produkt zweier Zahlenpaare verstehen? Schreiben wir $(a, b) \cdot (c, d)$ in der Form

$$(ae_1 + be_2) \cdot (ce_1 + de_2)$$

und rechnen wir dieses Produkt nach den gewöhnlichen Regeln, also mit Benützung des distributiven Gesetzes aus, so kommen vier verschiedene Verknüpfungen der Einheiten vor, die wir definieren müssen. Soll die Multiplikation nicht aus dem System herausführen, so muß $e_1 \cdot e_2$ wieder eine

Zahl des Systems, d. h. eine lineare Kombination der Einheiten $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ sein. Unter den unbegrenzt vielen Definitionen, die sich darbieten, muß jetzt eine gewählt werden. Der einzige Leitstern, nach dem wir uns richten können, ist der Zweck, den das System erfüllen soll. Dieser Zweck wird erreicht, wenn wir folgende Festsetzungen treffen:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1 \\ e_1 \cdot e_2 &= e_2 \cdot e_1 = e_2 \\ e_2 \cdot e_2 &= -e_1. \end{aligned}$$

Durch diese Formelgruppe wird unter den unendlich vielen möglichen komplexen Zahlensystemen eines ausgeschieden. Die Multiplikation nimmt dann folgende Gestalt an:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wir überzeugen uns nun zunächst, daß die Zahlenpaare $(1, 0)$ und $(0, 0)$ in diesem System ganz die Rolle der 1 und der 0 spielen; so ist z. B.

$$\begin{aligned} (a, b) + (0, 0) &= (a, b) \text{ genau wie } a + 0 = a \\ (a, b) \cdot (0, 0) &= (0, 0) \text{ genau wie } a \cdot 0 = 0 \\ (a, b) \cdot (1, 0) &= (a, b) \text{ genau wie } a \cdot 1 = a. \end{aligned}$$

Allgemein wird dem Zahlenpaar $(a, 0)$ die reelle Zahl a entsprechen und man erkennt so, daß es ein Teilsystem der komplexen Zahlen gibt, die Zahlen von der Form $(a, 0)$, das dem der reellen Zahlen eineindeutig und isomorph entspricht. (Von ähnlich kann man jetzt nicht sprechen, weil wir die Relationen „größer“, „kleiner“ nicht definiert haben.)

Der Übergang zur gewöhnlichen Darstellung besteht nun darin, daß man $e_1 = 1$ und $e_2 = i$ setzt; dann lauten die Multiplikationsregeln

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \\ 1 \cdot i &= i \cdot 1 = i \\ i \cdot i &= -1, \end{aligned}$$

und auf der letzten Formel beruht es eben, daß man mit Hilfe dieses Systems die Gleichung $x^2 = -1$ lösen kann. Hätten wir die Multiplikationsregeln anders gefaßt — was vom Standpunkt der Logik genau so zulässig gewesen wäre — so hätten wir diesen Zweck nicht erreicht. Es ist also die spätere Anwendung, die über die Wahl der Definition entscheidet.

Die Division wird als die inverse Operation der Multiplikation eingeführt. Setzt man

$$\frac{1}{a + bi} = x + iy,$$

so ist

$$1 = (a + bi)(x + iy),$$

d. h.

$$1 = (ax - by) + i(ay + bx).$$

Vergleicht man Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem, so ergibt sich

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

und man hat

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Eine Größenordnung haben wir bisher nicht festgelegt. Wir wollen nun eine Festsetzung treffen, indem wir etwa erklären: (a, b) soll größer oder kleiner sein als (c, d) , je nachdem $a > c$ oder $a < c$ ist; ist aber $a = c$, so soll die Entscheidung davon abhängen, ob $b > d$ oder $b < d$ ist. Im Sinn dieser Festsetzungen wird

$$(0, 1) < (1, 0)$$

sein. Aber so oft wir auch das linke Zahlenpaar vervielfachen, so ist doch stets

$$n \cdot (0, 1) = (0, n) < (1, 0).$$

Es hört also (wie es nach den allgemeinen Erörterungen von S. 162 sein muß) die Gültigkeit des Archimedischen Axioms auf: $(0, 1)$ erscheint in dieser Auffassung aktual unendlichklein gegenüber $(1, 0)$.

Kann man nicht auch Zahlen einführen, die eine Darstellung im dreidimensionalen Raum, allgemein in einem n -dimensionalen Raum verlangen? Man wird da n -tupel von Zahlen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

zu betrachten haben und für sie die Definitionen der Gleichheit, der Summe, der Differenz und der Multiplikation mit einer reellen Zahl in ganz analoger Weise geben. Jeder solche Ausdruck kann dann als lineare Kombination von n „Einheiten“ dargestellt werden:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Will man auch die Multiplikation einführen und sich dabei von der Analogie mit der gewöhnlichen Buchstabenrechnung leiten lassen, so muß man festlegen, was man unter dem Produkt zweier Einheiten $e_r \cdot e_s$ verstehen will. Und hier gibt es nun zwei Möglichkeiten: Entweder dieses Produkt läßt sich mit den bisherigen Mitteln nicht darstellen; dann muß man etwa neue Einheiten einführen, deren Multiplikation mit den bisherigen Zahlen wieder neue Einheiten erfordert, so daß das ursprüngliche System immer mehr erweitert werden muß. Oder das System ist geschlossen in dem Sinn, daß das Produkt zweier Einheiten wieder eine Zahl des Systems ist; man wird dann auf den Ansatz geführt

$$e_r \cdot e_s = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Für jede der n^2 möglichen Kombinationen müssen wir uns nun eine solche Formel gebildet denken, und in der Angabe der n^2 Koeffizienten dieser Formeln liegt das Charakteristische eines jeden solchen Zahlensystems¹⁾.

¹⁾ Grassmann, einer der Schöpfer der höheren komplexen Zahlen, hat in einer Arbeit aus dem Jahre 1855 nicht weniger als 16 verschiedene Arten der Multiplikation behandelt.

Das Studium dieser „hyperkomplexen“ Zahlen hat gewisse allgemeine Wahrheiten zutage gefördert. Weierstraß hat in einer 1863 in Berlin gehaltenen Vorlesung gezeigt, daß solche Zahlensysteme zwar denkmöglich sind, daß man aber in ihnen auf gewisse fundamentale Rechengesetze verzichten muß: entweder hört bei dem Rechnen mit diesen Zahlen das kommutative Gesetz der Multiplikation auf, so daß $a \cdot b$ von $b \cdot a$ zu unterscheiden ist (und das hat zur Folge, daß es dann zwei Arten von Divisionen gibt). Oder das kommutative Gesetz läßt sich aufrechterhalten, dann gehen aber andere wichtige Gesetze der Arithmetik verloren, z. B. der Satz, daß ein Produkt zweier Zahlen nur dann verschwinden kann, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren Null ist; in diesem Falle kann die Division unendlich vieldeutig werden. Das Permanenzprinzip läßt uns hier im Stich, da es nicht mehr eindeutig den Weg vorzeichnet, den wir bei der Erweiterung zu gehen haben. Verlangt man, daß das kommutative Gesetz der Multiplikation erhalten bleibe und daß eine algebraische Gleichung (z. B. $ax + b = 0$) mit von Null verschiedenen Koeffizienten nicht unendlich viele Lösungen besitze, so bleiben nur die gewöhnlichen komplexen Zahlen übrig. Diese nehmen also eine ausgezeichnete Stellung ein. Darin liegt die Antwort auf die Frage, deren Lösung Gauß angekündigt, aber nicht gegeben hatte, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können“.

Der Leser wird nun fragen: Ist das alles nicht nur eine Spielerei? Kann man mit solchen hyperkomplexen Zahlen etwas Vernünftiges anfangen? Da wollen wir nur auf ein solches System hinweisen, das eine gewisse Anwendung erlangt hat, auf die Quaternionen Hamiltons¹⁾. Es sind das, wie der Name sagt, viergliedrige Zahlen, die sich aus einer reellen und drei weiteren Einheiten aufbauen, die man als gerichtete Größen (Vektoren) in unserem dreidimensionalen Raum deuten kann. Ohne hier genauer auf diese Dinge einzugehen, wollen wir nur soviel sagen, daß die Quaternionen eine sehr nützliche Rolle bei der mathematischen Behandlung der Drehung (genauer: der Drehstreckung, d. h. einer Drehung des dreidimensionalen Raumes um den Anfangspunkt, verbunden mit einer Streckung in einem bestimmten Verhältnis) spielen und daß darauf ihre Bedeutung in der Physik beruht. Solche Drehstreckungen spielen nämlich gerade bei der Deutung gewisser Formeln der Relativitätstheorie — der „Lorentztransformationen“ — in der vierdimensionalen Raum—Zeit—Welt Minkowskis eine Rolle. — Aus dem Nachlaß von Gauß geht hervor, daß er schon 1819 die Quaternionen und ihre Anwendungen gekannt hat.

¹⁾ „Lectures on Quaternions“, 1853.

16. Erfinden oder Entdecken?

Unsere Erörterungen sind ein gutes Beispiel, um die Lehren der Schullogik auf die Probe zu stellen. Nach dieser Lehre soll die Bildung der Begriffe durch Abstraktion (Absehen von Merkmalen) resp. durch Determination (Hinzufügen von Merkmalen) geschehen. Geht das nun wirklich so vor sich? Hat man etwa zuerst einen allgemeinen Begriff der Zahl und wird dieser Begriff schrittweise eingeeengt durch Zusatz artbildender Merkmale, so daß man zu dem Begriff der komplexen Zahl, dann zu dem der reellen Zahl usf. hinabsteigt? Oder sollen wir uns umgekehrt vorstellen, daß man von den Begriffen der Zahlarten ausgehend durch Hervorheben der gemeinsamen Eigenschaften zu dem allgemeinen Zahlenbegriff gelangt? Aber welches sind diese allgemeinen Eigenschaften? Das Schema, das wir früher umrissen hatten (auf S. 162), ist für die natürlichen und ganzen Zahlen zu weit, anderseits zu eng, um die Veronesischen und die komplexen Zahlen aufzunehmen. Und das ist eine sehr charakteristische Situation: Welches System von Forderungen immer man stellt, nie ist man sicher, den Begriff der Zahl genau umgrenzt zu haben; denn was gibt uns die Gewähr, daß nicht neue Zahlarten entdeckt werden, die unsere Forderungen verletzen? Oder sollen wir in dem Fall erklären, solche Gebilde dürften nicht Zahlen genannt werden?

„Kardinalzahl“, „ganze Zahl“, „rationale Zahl“ wird man scharf umgrenzte Begriffe nennen; denn jeder von ihnen ist durch einen Kalkül definiert. Fragt man aber, was man unter einer Zahl (im allgemeinen) versteht, so kann man nichts besseres tun als erklären: Unter den Begriff „Zahl“ fallen die genannten Gebilde und alle die, die ihnen irgendwie ähnlich sind; wobei wir die Art der Ähnlichkeit absichtlich offen lassen. Wenn man meint, in der Mathematik müssen alle Begriffe klar und scharf definiert sein, so wollen wir nur darauf hinweisen, daß der Mathematiker den allgemeinen Begriff der Zahl nicht nötig hat. In der Tat, wo wäre dieser Begriff bei unseren Beweisen vorgekommen?

Mit der Frage: Was ist eine Zahl? verhält es sich ähnlich wie mit der Frage: Was ist ein Punkt? Zunächst: Hat das Wort „Punkt“ in der euklidischen Geometrie der Ebene dieselbe Bedeutung wie in der euklidischen Geometrie des Raumes? Durchaus nicht; von einem Punkt gelten in letzterem Fall mehr Regeln als im ersteren. Dieses Wort hat also nur in einer bestimmten Geometrie eine klar umrissene Bedeutung. Stellen wir die metrische Geometrie, die affine, die projektive und die Topologie nebeneinander, so verbindet

jede von ihnen mit dem gleichen Wort einen anderen Sinn, der eigentlich erst durch die Aufzählung sämtlicher Axiome der betreffenden Wissenschaft charakterisiert ist. Gebraucht man nun das Wort „Punkt“ schlechthin, ohne nähere Erklärung, also wohl als Analogon zu dem, was man etwa in der euklidischen Geometrie der Ebene so nennt, so verliert es seine prägnante Bedeutung und nimmt eine vage, verschwommene an. Und genau dasselbe Umschlagen ins Vage, Verschwommene können wir bei dem Begriff der Zahl verfolgen, wenn wir ihn nicht mehr durch einen bestimmten Kalkül definiert sein lassen. Es wird dann einigermaßen unsicher, was man noch eine Zahl nennen soll. Z. B. könnte man auch eine algebraische Gleichung eine „Zahl“ nennen oder ein Element einer abstrakten Gruppe; oder auch einen Satz, mit dem die symbolische Logik kalkuliert (ja hierfür sprächen sogar mancherlei Analogien, da für Sätze gewisse Verknüpfungen definiert sind, die man „Summe“ und „Produkt“ nennt und da man ferner die Rolle der Tautologie und der Kontradiktion mit der der Zahlen 1 und 0 vergleichen kann). Ob man den Begriff der Zahl so weit fassen will, ist schließlich eine Frage des Gefühls und der Tradition.

Drücken wir es so aus: Die einzelnen Zahlbegriffe (Kardinalzahl, ganze Zahl usw.) bilden eine Familie, deren Glieder eine Familienähnlichkeit haben. Worin besteht die Ähnlichkeit der Glieder einer Familie? Nun, einige haben dieselbe Nase, andere dieselben Augenbrauen und andere wieder dieselbe Gangart; und diese Ähnlichkeiten überdecken sich zum Teil. Wir brauchen nicht zu behaupten, daß sie alle eine Eigenschaft gemein haben müssen; selbst wenn es eine solche Eigenschaft gäbe, muß nicht sie es sein, welche die Familienähnlichkeit ausmacht. In diesem Sinn werden wir die Ausdrucksweise verwenden, das Wort „Zahl“ bezeichnet nicht einen Begriff (im Sinne der Schullogik), sondern eine „Begriffsfamilie“. Wir wollen damit sagen, daß die einzelnen Zahlenarten miteinander auf mannigfache Weise verwandt sind, ohne daß sie in einer Eigenschaft, einem Zug übereinstimmen müssen.

Dasselbe gilt von den Ausdrücken „Arithmetik“, „Geometrie“, „Kalkül“, „Operation“, „Beweis“, „Problem“ u. a. Sie alle bezeichnen Begriffsfamilien, und es hat wenig Wert, über ihre genaue Abgrenzung zu diskutieren. Will man den Begriff der Arithmetik erklären, so wird man auf Beispiele hinweisen und den Begriff soweit reichen lassen als die Ähnlichkeit mit diesen Beispielen reicht. Gerade das Offene, Unabgeschlossene dieses Begriffs hat auch sein Gutes, denn es gibt der Sprache die Freiheit, neue Entdeckungen in ein bekanntes Schema zu fassen.

Diese Dinge mußten hier ausgeführt werden, weil sie den Hintergrund abgeben für eine Frage, die sich der grübelnde Geist immer wieder stellt: Sind die Zahlen Schöpfungen des menschlichen Geistes oder kommt ihnen

eine selbständige Art des Seins zu? Werden sie erfunden oder werden sie entdeckt? Wer die bisherigen Betrachtungen überblickt, kann über den Ausfall der Antwort nicht im Zweifel sein. Sollen wir unsere Ansicht in eine kurze Formel fassen, so würden wir sagen: die Bedeutung eines Zeichens ergibt sich aus seiner Verwendung. Die Regeln der Verwendung verleihen dem Zeichen erst seine Bedeutung. Wir lehnen damit die Auffassung ab, daß die Regeln aus der Bedeutung der Zeichen folgen. Gerade das ist eine Lieblingsansicht vieler Philosophen; wir wollen diese Meinung genauer prüfen, um zu sehen, welchen Wert sie dann noch behalten wird.

Der bedeutendste Vertreter der besprochenen Auffassung ist Frege. Er sucht die „formale Auffassung“ der Arithmetik — so nannte er die damals aufkommende axiomatische Betrachtungsweise — durch eine tiefdringende Analyse ihrer Voraussetzungen ad absurdum zu führen. Seine Argumente treffen zum Teil auch uns, und es wird daher zur Klarheit beitragen, wenn wir unsere Ansicht an der Kraft seiner Gründe messen. Seine Auffassung läßt sich in vier Argumente zusammenfassen.

1. Argument. Man kann zwar die Arithmetik als ein Spiel mit Zeichen ansehen; aber dann geht uns der eigentliche Sinn des Ganzen verloren. Wenn ich jemandem gewisse Regeln für den Gebrauch des Gleichheitszeichens gebe — ihm also sage, daß er von der Formel $a = b$ auf die Formel $b = a$ übergehen darf, ferner von den Formeln $a = b$ und $b = c$ auf die Formel $a = c$ — habe ich ihm damit den Sinn dieses Zeichens mitgeteilt? Versteht er nun, was das Zeichen „ $=$ “ bedeutet? Oder habe ich ihm nur eine mechanische Anweisung zum Gebrauch des Zeichens gegeben, die er auch befolgen könnte, ohne eine Ahnung von ihrem Sinn zu haben? Doch wohl das Letztere! Dann geht aber der formalen Auffassung der Arithmetik gerade das Wichtigste verloren, der Sinn, der sich in den Zeichen ausspricht. Diesen Sinn kann man nur durch das Denken erfassen, durch einen geistigen Vorgang.

Erwiderung: Gesetzt, es sei so. Warum beschreiben wir dann nicht lieber gleich diesen geistigen Vorgang? Aber wenn man mich fragt, was die Formel „ $1 + 1 = 2$ “ bedeutet, so werde ich nicht mit einer Schilderung meines Geisteszustandes antworten, sondern mit einer Zeichenerklärung. Ich werde sagen, diese Formel bedeute in Worten „eins und eins ist gleich zwei“ oder „ $1 + 1$ darf durch 2 ersetzt werden“; oder ich führe in einem Beispiel den Gebrauch dieser Formel vor. Als Antwort gebe ich also 1. Übersetzungen der arithmetischen Formel in die Wortsprache und 2. Anwendungen. Ich verknüpfe dieses Zeichen mit anderen Zeichen, mache es zum Teil eines Systems von Zeichen und Operationen, und das gibt ihm seinen Sinn.

Man sagt: Aber ich weiß doch, was das Zeichen „ $=$ “ heißt, und auf die Frage „nun, was heißt es denn?“ gibt man sich eine Reihe von Antworten: Es heißt „gleich“, es heißt „ersetzbar durch“, wenn es zwischen zwei Zeichen

steht, bedeutet das linke das Gleiche wie das rechte; 2×2 ist z. B. gleich 4, $(a + b)^2$ ist gleich $a^2 + 2ab + b^2$, kurz man versinnbildlicht sich die verschiedenen Verwendungen des Zeichens. Man hat sich nicht eine Antwort gegeben, sondern viele. Die Bedeutung der Formel $1 + 1 = 2$ ist gleichsam die ganz Aura auf dem Grund unserer Wortsprache, die wieder ein Gewebe von Zeichen und Operationen ist.

Diese Überlegung zeigt zugleich, was der berechtigte Kern an Freges Kritik ist. Richtet man nämlich das Augenmerk ausschließlich auf die formelhafte Seite der Arithmetik, löst man sie ganz von der Anwendung los, trennt man all die Fäden durch, welche sie mit unserer Wortsprache verbinden, dann erhält man freilich ein bloßes Spiel. Wenn wir ein Kind nur solche Formeln lehrten und weiter nichts, würde ihm das entgehen, was wir den Sinn des Ganzen nennen. Frege hatte also darin recht, daß er in der Arithmetik mehr sah, als ein solches Formelspiel. Aber was hier fehlt, ist nicht ein Vorgang des Verstehens, der das Lesen der Formeln begleitet, sondern die Deutung der Formeln. Und diese Deutung besteht in gar nichts anderem als in der Eingliederung der Regeln des Kalküls in einen weiteren syntaktischen Zusammenhang. Wenn ich ein Kind außer den Formeln auch noch die Übersetzungen dieser Formeln in die Wortsprache lehre und verschiedene Beispiele der Anwendung — entgeht ihm dann noch immer der eigentliche Sinn? Und macht es von den Zeichen noch immer einen bloß mechanischen Gebrauch?

2. Argument. Es ist also die Anwendung, welche die Arithmetik von einem Spiel unterscheidet. Worauf beruht aber die Anwendung? „Ohne einen Gedankeninhalt“, sagt Frege, „wird auch keine Anwendung möglich sein. Warum kann man von einer Stellung von Schachfiguren keine Anwendung machen? Offenbar, weil sie keine Gedanken ausdrückt. Warum kann man von arithmetischen Gleichungen Anwendungen machen? Nur weil sie Gedanken ausdrücken.“ (Grundgesetze der Arithmetik, II. Bd., § 91.)

Erwiderung: Denken wir uns, man erfände ein arithmetisches Spiel, das genau so aussieht wie die wirkliche Arithmetik, aber zum Unterschiede von dieser nie angewendet wird, sondern nur zum Vergnügen dient — würde es noch einen Gedankeninhalt ausdrücken? Die meisten würden diese Frage wohl verneinen. Was muß also hinzukommen, damit eine Gleichung der Arithmetik einen Gedankeninhalt ausdrückt? Die Anwendung und nur diese. Mathematik ist es dann, wenn die Gleichung zum Übergang von einem Satz zum anderen verwendet wird (vgl. Kap. 9); und sonst ist es Spiel. Zu sagen, daß eine Stellung von Schachfiguren keine Gedanken ausdrückt, ist voreilig; denn das hängt ganz von uns ab. Gesetzt, daß sich die Truppen im Krieg so bewegen wie die Figuren auf dem Schachfeld, dann könnte uns das veranlassen, durch eine Stellung von Figuren einen Sinn

auszudrücken; ein Schachzug erhielte nun eine Bedeutung, und die Offiziere würden sich genau so über das Schachbrett beugen wie jetzt über die Generalstabskarte. Die Bewegung der Figuren wäre eben ein Abbild wirklicher Vorgänge und nicht ein „bloßes Spiel“. „Weil ein Schachzug keine Gedanken ausdrückt, kann man von ihm keine Anwendung machen.“ Sollte es nicht richtiger heißen: weil wir keine Anwendung vorgesehen haben, drückt ein Schachzug keine Gedanken aus?

Ein Gegner wird vielleicht erwidern, gerade das Gesagte beweise die Richtigkeit von Freges Anschauungen. Denn woran liegt es nun, daß eine Stellung von Schachfiguren etwas ausdrücken kann? Doch nur daran, daß die Steine auf dem Brett die Truppen auf dem Schlachtfeld bedeuten; daß sie also Zeichen von etwas sind. Das führt uns in den Gedankenkreis des

3. Argumentes. Die Anwendung der Arithmetik kann nur darauf beruhen, „daß die Zahlzeichen etwas bedeuten, die Schachfiguren aber nichts“. (§ 90.) Man sage nicht, daß der Mathematiker durch seine Definition die Zahlen schafft. „Es kommt hier darauf an, sich klar zu machen, was Definieren heißt und was dadurch erreicht werden kann. Man scheint ihm vielfach eine schöpferische Kraft zuzutrauen, während doch dabei weiter nichts geschieht, als das etwas abgrenzend hervorgehoben und mit einem Namen bezeichnet wird. Wie der Geograph kein Meer schafft, wenn er Grenzlinien zieht und sagt: den von diesen Linien begrenzten Teil der Wasserfläche will ich Gelbes Meer nennen, so kann auch der Mathematiker durch sein Definieren nichts eigentlich schaffen. Man kann auch nicht einem Dinge durch bloße Definition eine Eigenschaft anzaubern, die es nun einmal nicht hat, es sei denn die eine, nun so zu heißen, wie man es benannt hat. Daß aber ein eirundes Gebilde, das man mit Tinte auf Papier hervorbringt, durch eine Definition die Eigenschaft erhalten soll, zu Eins addiert Eins zu ergeben, kann ich nur für einen wissenschaftlichen Aberglauben halten. Ebenso gut könnte man durch bloße Definition einen faulen Schüler fleißig machen. Erst wenn man bewiesen hat, daß es einen Gegenstand und nur einen einzigen von der verlangten Eigenschaft gibt, ist man in der Lage, diesen Gegenstand mit dem Eigennamen „Null“ zu belegen. Die Null zu schaffen ist also unmöglich.“ (Bd. I, S. XIII.)

Dieses Argument besagt also: Ein Zeichen muß etwas bezeichnen, sonst ist es bloße Druckerschwärze auf dem Papier. Nur weil es Zahlen gibt, ist die Arithmetik eine Wissenschaft.

Erwiderung: Der Kern der Sache liegt in der letzteren Behauptung. Wir wollen sie weder bestreiten noch zugeben, sondern wir fragen einfach: Welcher Sinn kommt dieser Behauptung zu? Daraus wird sich ja ergeben, was wir von ihr zu halten haben. Daß die Zahlen nicht dasselbe sind wie die Zeichen, die wir aufs Papier schreiben, daß es vielmehr auf den Gebrauch

nkommt, den wir von den Zeichen machen, das ist so klar, daß darüber nicht ein Wort zu verlieren ist. Was aber Frege sagen will, ist mehr, weit mehr: Er meint, daß die Zahlen schon irgendwie da sind, so daß die Entdeckung der imaginären Zahlen etwa der Entdeckung eines fremden Erdteiles zu vergleichen ist. Was sollen wir von dieser Auffassung halten? Verdeutlichen wir uns die Sache an einem Beispiel! Nehmen wir an, wir hätten uns ein Zahlensystem ausgedacht, das aus n Einheiten i_1, i_2, \dots, i_n besteht, wir hätten ferner Vorschriften gegeben, wie mit diesen Zahlen zu rechnen ist. Wir fragen nun: Existieren diese Zahlen — ja oder nein? Frege muß diese Frage verneinen und hat sie verneint. Er schreibt in bezug auf dieses Beispiel ausdrücklich: „Nirgends ist bewiesen, daß es solche Einheiten gebe, nirgends ist bewiesen, daß man das Recht habe, sie zu schaffen. Es ist unmöglich ‚ i_1 ‘, ‚ i_2 ‘ usw. als bedeutungsvolle Eigennamen aufzufassen, ähnlich wie ‚2‘ und ‚3‘.“ (Bd. II, § 141.) Er hätte höchstens zugestanden, das sei ein interessantes Spiel. Wie aber, wenn sich dieses Spiel für die Mathematik als ungemein fruchtbar erwiese? Wenn mit seiner Hilfe die Lösung von Problemen gelänge, die bis dahin unangreifbar waren? Sollen wir dann noch immer sagen, diese Zahlen existieren doch in Wirklichkeit nicht? Kein Mathematiker wird so denken, sondern man wird mit diesen Gebilden ebenso arbeiten wie mit den negativen oder mit den irrationalen Zahlen. Man sage nicht, das seien leere Möglichkeiten; denn so ging es tatsächlich zu bei der Einführung der imaginären Zahlen, der Hamiltonschen Quaternionen, der aktual unendlich kleinen Zahlen Veroneses, die ursprünglich alle nicht viel mehr gewesen sind wie ein Spiel, bis sich ihr großer Nutzen herausgestellt hat. Was ist natürlicher als zu sagen: Im Falle der imaginären Zahlen, der Quaternionen usf. hat sich eine Anwendung gefunden, und deshalb sind sie Gegenstände der Wissenschaft; in anderen Fällen ist eine solche Anwendung ausgeblieben, und darum ist es Spiel?

Ein Anhänger Freges wird nun vielleicht erwidern: Das zeigt eben, daß in dem einen Fall etwas Objektives vorliegt, in dem anderen nicht. Sehr wohl! Aber dann bleibt jedenfalls bestehen, daß das Kriterium der Existenz die Anwendbarkeit ist. Nun, dann ist auch der ganze Sinn der Aussage, die jenen Zahlen objektive Existenz zuspricht, in der Anwendbarkeit gelegen, und diese Aussage bedeutet nicht um ein Jota mehr.

4. Argument. Wenn man wirklich neue Zahlen schaffen könnte, um ein bis dahin unlösbares Problem lösbar zu machen — z. B. der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung zu verleihen, — warum wendet man dieses einfache Mittel nicht überall an, um sich unlösbare Probleme zu entledigen? Die Gleichung $1^x = 2$ läßt z. B. keine Lösung zu, wenigstens so lange man sich auf die bisher bekannten Zahlen beschränkt. Gut, schaffen wir eine neue Zahl, und nun ist diese Gleichung lösbar! Ginge das wohl? Nein, mit dem

Worte „schaffen“ ist nichts getan. Bei der Aufgabe, die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zu lösen, gelingt eine Erweiterung des Zahlgebietes, bei der Gleichung $1^x = 2$ gelingt es nicht mehr. Ob es gelingt oder nicht, das hängt nicht von uns ab, sondern von objektiven Gesetzen, und an diesen findet jene vorgebliche Schaffensmacht ihre Schranken.

Allein gerade die nähere Erwägung eines solchen Falles verwandelt das Argument gegen das Schaffen in solches für dieses. Wenn man nämlich fragt, ob sich das Zahlgebiet erweitern läßt oder nicht, so setzt die Frage voraus, daß der Zahlbegriff eindeutig bestimmt ist. Und da scheint es nun, als sei die Frage zu verneinen, als komme man vielmehr irgendwo gleichsam an den Rand des Zahlenreiches; denn die Gleichung $1^x = 2$ läßt eben keine Lösung zu. In Wirklichkeit verhält es sich damit so: Wollte man einen Kalkül bilden, mit welchem sich jene Gleichung lösen läßt, so ginge das schon; nur wäre das ein sehr seltsamer Kalkül, grundverschieden von alledem, was man sonst „Zahlkalkül“ oder „Arithmetik“ nennt. Gewisse fundamentale Gesetze unserer Arithmetik würden da ihre Geltung verlieren; eine Zahl dieses Kalküls würde z. B. durch Hinzufügen einer gewöhnlichen Zahl nicht größer werden usw. — aber alles das wäre schließlich kein Einwand gegen ihn. Freilich, er wäre etwas ganz Isoliertes, gleichsam ein Fremdkörper unter den anderen Kalkülen, und darum erscheint uns ein solches System nicht als Fortsetzung unseres Zahlenreiches. Diese Tatsache drücken wir aus in der etwas unklaren Form, das Zahlgebiet lasse nach dieser Richtung keine Erweiterung zu, es gäbe keine solchen Zahlen. Aber das heißt doch nur: Wir verzichten darauf, einen solchen Kalkül einen Zahlkalkül zu nennen.

Für Frege stand die Alternative so: Entweder wir haben es mit Tintenstrichen auf Papier zu tun — das gäbe keine Arithmetik; oder wir müssen zugeben, daß die Zeichen eine Bedeutung haben, und dann existiert die Bedeutung unabhängig von den Zeichen. Aber die Bedeutung ist ja nicht ein Ding, das auf geheimnisvolle Weise mit dem Zeichen gekuppelt ist; sondern sie ist die Verwendung des Zeichens, und über diese gebieten wir.

Nachwort.

Zuletzt erfüllt der Verfasser noch gern die Pflicht, auf diejenigen Quellen hinzuweisen, die er — soweit sie nicht schon im Text ausdrücklich genannt sind — bei Abfassung dieses Buches benutzt hat. Es sind das vor allem die Vorlesungen über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ von Felix Klein und die „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen“ von Konrad Knopp.

Hinsichtlich der Grundlagen der Mathematik hat der Verfasser eine Anzahl von Gedanken aus einem unveröffentlichten Manuskript geschöpft, in welches Herr Ludwig Wittgenstein ihm Einblick zu nehmen erlaubt hat. Die Ausführungen über Induktion S. 74 bis 79, die Kritik an Freges und Russells Definition des Begriffs „gleichzahlig“ (S. 86 bis 89), die auf S. 94f. dargestellten Ideen, ferner die Bemerkung, daß der Begriff der Gleichheit nicht notwendig transitiv sein müsse (S. 51), die Stellungnahme zu gewissen Behauptungen Brouwers (S. 166f.), schließlich die S. 164f. und S. 173 vorgetragenen Gedanken über das anschauliche Kontinuum, die Ausführungen über die Zahl als Begriffsfamilie auf S. 182 und die Kritik an dem ersten Argument auf S. 183f. sind dieser Arbeit entnommen. Doch will der Verfasser hinzufügen, daß er schon wegen der Kürze der Darstellung nicht ganz sicher ist, wie weit sich seine Ausführungen mit den Gedanken Wittgensteins decken und daß er deshalb selbst die Verantwortung für seine Darstellung übernimmt.

Im gleichen Verlage erschien:

HEINRICH GOMPERZ

a. ö. Professor der Philosophie an der Universität Wien

**DIE WISSENSCHAFT
UND DIE TAT**

Preis Mark 1.50, ö. S 281

EINHEITSWISSENSCHAFT

Schriften, herausgegeben von OTTO NEURATH in Verbindung mit
RUDOLF CARNAP und JØRGEN JØRGENSEN

Heft 1: OTTO NEURATH,
Einheitswissenschaft und Psychologie
1933

Heft 2: HANS HAHN,
Logik, Mathematik und Naturerkennen
(vergriffen)

Heft 3: RUDOLF CARNAP,
Die Aufgabe der Wissenschaftslogik
1934

Heft 4: OTTO NEURATH,
Was bedeutet rationale Wirtschaftsbetrachtung?
1935

Heft 5: PHILIPP FRANK,
Das Ende der mechanistischen Physik
1935

Preise der Hefte 1, 4, 5 je Mark 2.--, des Heftes 3 Mark 1.50
(für Österreich ö. S 367, resp. ö. S 281)

GEROLD & CO. / WIEN